

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя школа № 32 им. С.А. Лавочкина» города Смоленска

Методическая разработка
Элективный курс «Модуль – это просто»

Учитель математики и информатики
Полякова Лилия Владимировна

2017 г.

Оглавление

| | |
|--|----|
| Пояснительная записка | 3 |
| Учебно-тематический план..... | 7 |
| Содержание программы..... | 9 |
| Методическое сопровождение к элективному курсу | 11 |
| Дидактический материал для учащихся | 74 |

Пояснительная записка

Реализация идеи обновления старшей школы, заключающейся в существенном расширении возможности выбора каждым школьником индивидуальной образовательной программы в соответствии с его интересами и послешкольными жизненными планами, предполагает введение на старшей ступени общего образования профильного обучения.

Профильное обучение – средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счёт изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

Для рациональной и успешной организации профильного обучения в старшей школе необходимо на второй ступени общего образования создать образовательное пространство, способствующее самоопределению учащегося в отношении профилирующего направления собственной учебно-познавательной или иной социально востребованной деятельности.

Предпрофильная (допрофильная) подготовка – это система педагогической, психолого-педагогической, информационной и организационной деятельности, содействующая самоопределению учащихся старших классов основной ступени относительно избираемых ими профилирующих направлений будущего обучения и широкой сферы последующей профессиональной деятельности (в том числе в отношении выбора профиля и конкретного места обучения на старшей ступени школы или иных путей продолжения образования).

Значительное место в предпрофильной подготовке занимают курсы по выбору.

Элективный курс предпрофильной подготовки – обязательный для посещения учебный курс по выбору учащихся, направленный на выбор или уточнение профиля дальнейшего обучения и (или) пути дальнейшего образования.

Предлагаемый элективный курс рассчитан на учащихся 9 классов общеобразовательных школ.

Данный курс предусматривает ориентацию на профессии, связанные с математикой, выбор профиля дальнейшего обучения, формирование устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей.

Элективный курс «Модуль – это просто» позволит школьникам систематизировать, расширить и укрепить знания, связанные с модулем, подготовиться для дальнейшего изучения тем, использующих это понятие, повысить уровень математической подготовки через решение большого класса задач.

Понятие модуля числа (абсолютной величины) является одной из важнейших характеристик числа как в области действительных, так и в области комплексных чисел.

Это понятие широко применяется не только в различных разделах школьного курса математики, но и в курсах математики, физики и технических наук, изучаемых в вузах. Например, в теории приближенных вычислений ис-

пользуются понятия абсолютной и относительной погрешности приближенного числа. В математическом анализе понятие абсолютной величины числа содержится в определениях таких понятий как предел, ограниченная функция и др. Задачи, связанные с модулем, часто встречаются на математических олимпиадах, ЕГЭ.

Появление таких заданий на экзаменах далеко не случайно, так как с их помощью проверяется техника владения формулами элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, уровень логического мышления учащихся и их математической культуры.

Задачи, связанные с модулем часто встречаются на математических олимпиадах, на вступительных экзаменах в вузы.

Решению задач с модулем в школьной программе уделяется мало внимания. Большинство учащихся либо вовсе не справляются с такими заданиями, либо приводят громоздкие выкладки. Причиной этого является отсутствие системы заданий по данной теме в школьных учебниках (программой школьного курса математики не предусмотрены обобщение и систематизация знаний о модуле, его свойствах, полученных учащимися за весь период обучения). В связи с этим и возникла необходимость в разработке и проведении элективного курса «Модуль – это просто».

Элективный курс по предпрофильной подготовке учащихся 9 классов посвящен систематическому изложению учебного материала, связанного с понятием модуля числа и аспектами его применения. В нем рассматриваются различные методы решения уравнений и неравенств с модулем, основанные на его определении, свойствах и графической интерпретации. Значительное внимание уделено вопросам построения графиков функций, содержащих модуль, приложения модуля к преобразованиям корней.

Для курса характерна практическая направленность. Его основное содержание составляют учебные задачи. Часть из них приводится с полным решением, иллюстрирующим тот или иной метод. Другие задачи предлагаются для самостоятельной работы. Проверка заданий для самостоятельного решения осуществляется на занятии путем указания способа решения и названия ответа. Изложение практических приемов решения сопровождается необходимыми теоретическими сведениями. Основные формы организации учебных занятий: эвристическая беседа, практикум, семинар-практикум, работа в группах, практическая работа, исследовательская деятельность учащихся. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся разной степени подготовки. Курс является открытым, в него можно добавлять новые фрагменты, развивать тематику или заменять какие-либо разделы другими.

Элективный курс «Модуль – это просто» направлен на подготовку учащихся к обучению в классах физико-математического, физико-химического, химико-биологического, социально-экономического, информационно-технологического профилей и рассчитан на 17 часов.

Цели курса: развитие у учащихся умения сделать ответственный выбор профиля и способа дальнейшего обучения, повышение уровня математической подготовки школьников, создание в совокупности с основными разделами курса базы для развития способностей учащихся, формирование устойчивого интереса к предмету.

Задачи курса:

- помочь учащимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы;
- сформировать у учащихся систему знаний по теме «Модуль»;
- сформировать навыки применения знаний по теме «Модуль» при решении разнообразных задач различной степени сложности;
- сформировать навыки самостоятельной работы, сформировать умения и навыки исследовательской работы;
- сформировать навыки работы со справочной литературой, с компьютером;
- способствовать развитию алгоритмического и логического мышления учащихся;
- способствовать формированию познавательного интереса к математике.

Требования к уровню усвоения учебного материала

В результате изучения программы элективного курса «Модуль – это просто» учащиеся должны знать и понимать:

- определение модуля числа, основные свойства модуля числа;
- геометрический смысл модуля;
- алгоритмы решения уравнений и неравенств, содержащих модуль;
- правила построения графиков функций, содержащих модуль.

Уметь:

- точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;
- применять изученные алгоритмы для решения соответствующих заданий;
- преобразовывать выражения, содержащие модуль;
- решать уравнения и неравенства, содержащие модуль;
- читать и строить графики функций, аналитическая запись которых содержит знак модуля.

Изучение курса завершается выполнением итоговой проверочной работы и защитой исследовательских и творческих работ.

Возможные критерии оценок

По итогам окончания курса даётся оценка учебных достижений учащихся.

Оценку можно проводить в баллах:

- прослушал, ознакомлен – 1 балл,
- знает материал – 2 балла,

- применяет (проекты, творческие работы, отчеты по итогам исследовательской работы) – 3 балла.

Эффективность элективного курса определяется с помощью анкетирования, которое проводится на последнем занятии, опроса учащихся, их родителей. При этом учитывается интерес учащихся к изучению курса, а также, насколько элективный курс помог учащемуся самоопределиваться к профилю.

Кроме того, эффективность преподавания элективного курса может быть подтверждена:

- анализом отметок учащихся, выбравших соответствующий профиль, по предметам, связанным с элективным курсом;
- количественным анализом набранных учащимися баллов (1, 2, 3);
- количественным и качественным анализом проведенных исследовательских работ, творческой деятельности учащихся на элективном курсе;
- результатами участия школьников в олимпиадах, конференциях, конкурсах.

Учебно-тематический план

| № п/п | Название разделов и тем | Количество часов | | | Форма проведения | Образовательный продукт |
|-----------|---|------------------|------------|------------|--|---|
| | | всего | теории | практики | | |
| 1. | Модуль: общие сведения. | 2 | 0,5 | 1,5 | | |
| 1.1. | Модуль. Общие сведения: определение, свойства модуля, геометрический смысл модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль. | 1 | 0,5 | 0,5 | беседа, практикум | опорный конспект, решенные задания |
| 1.2. | Преобразование выражений, содержащих модуль. | 1 | | 1 | практикум | решенные задания |
| 2. | Уравнения и неравенства, содержащие модуль. | 9 | 4 | 5 | | |
| 2.1. | Решение уравнений вида $f(x) = g(x), f(x) = g(x)$. | 2 | 1 | 1 | беседа, практикум, рекомендации по проведению исслед. и творч. работ | опорный конспект, решенные задания |
| 2.2. | Решение уравнений вида $ f(x) = g(x) , h(f(x)) = g(x)$. | 2 | 1 | 1 | беседа, практикум | опорный конспект, решенные задания |
| 2.3. | Решение неравенств вида $f(x) < g(x), f(x) < g(x), f(x) > g(x)$. | 2 | 1 | 1 | беседа, практикум | опорный конспект, решенные задания |
| 2.4. | Решение неравенств вида $ f(x) < g(x), f(x) > g(x), f(x) \geq g(x) , h(x, f(x)) < g(x)$. | 2 | 1 | 1 | беседа, практикум | опорный конспект, решенные задания |
| 2.5. | Решение уравнений, содержащих «модуль в модуле». Решение систем уравнений и систем неравенств, содержащих модуль. | 1 | | 1 | практикум, консультация по выполнению исслед. и творч. работ | решенные задания |
| 3. | Графики зависимостей, содержащих модуль. | 3 | | 3 | | |
| 3.1. | Построение графиков функций, содержащих модуль. | 1 | | 1 | исслед. работа с применением ПК, | памятка с правилами и алгоритмами построений, |

| | | | | | | |
|------|---|-----------|----------|-----------|---|---|
| | | | | | семинар-практикум, рекомендации по проведению исслед. и творч. работ | выполненные построения |
| 3.2. | Построение графиков вида $ y = f(x)$, $ y = f(x) $. | 1 | | 1 | семинар-практикум, практич. работа | памятка с правилами и алгоритмами построений, выполненные построения |
| 3.3. | Решение уравнений и неравенств графическим способом. Задание фигур на координатной плоскости уравнениями и неравенствами. | 1 | | 1 | семинар-практикум, практич. работа, консультация по выполнению исслед. и творч. работ | решенные задания |
| 4. | Модуль в заданиях ЕГЭ. | 1 | | 1 | семинар-практикум | решенные задания |
| 5. | Итоговое занятие. | 2 | | 2 | семинар-практикум | проверочная работа, зачетные индивидуальные и групповые работы |
| | Итого: | 17 | 5 | 12 | | |

Содержание программы

1. Модуль: общие сведения (2 ч)

Модуль. Общие сведения: определение, свойства модуля, геометрический смысл модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль.

Форма занятий: беседа, практикум.

Методы обучения: беседа, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка самостоятельно решенных задач.

2. Уравнения и неравенства, содержащие модуль (9 ч)

Решение уравнений вида $f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = g(x)$, $|f(x)| = |g(x)|$, $h(|f(x)|) = g(x)$.

Решение неравенств вида $f(|x|) < g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$, $|f(|x|) < g(x)$, $|f(|x|) > g(x)$, $|f(x)| \geq |g(x)|$, $h(x, |f(x)|) < g(x)$.

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль в модуле. Метод замены переменной. Решение систем уравнений и неравенств, содержащих модуль.

Форма занятий: беседа, практикум, консультация по выполнению исследовательских и творческих работ.

Методы обучения: беседа, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка самостоятельно решенных задач.

3. Графики зависимостей, содержащих модуль (3 ч)

Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$,
 $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|$.

Построение графиков уравнений вида $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$.

Решение уравнений и неравенств графическим способом.

Задание фигур на координатной плоскости уравнениями и неравенствами.

Форма занятий: семинар-практикум, исследовательская работа с применением ПК, практическая работа, консультация по выполнению исследовательских и творческих работ.

Методы обучения: беседа, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка самостоятельно решенных задач.

4. Модуль в заданиях единого государственного экзамена (1 ч)

Решение заданий единого государственного экзамена, содержащих модуль.

Форма занятий: семинар-практикум.

Методы обучения: беседа, выполнение тренировочных упражнений.

5. Итоговое занятие. Проверочная работа (2 ч)

Форма занятий: семинар-практикум.

Методы обучения: решение заданий, беседа.

Форма контроля: итоговая проверочная работа.

Методическое сопровождение к элективному курсу

Тема 1. Модуль: общие сведения (2 ч)

Занятие 1

Модуль: определение, свойства, геометрический смысл. Преобразование выражений, содержащих модуль.

Цели: познакомить учащихся с целями и задачами элективного курса, литературой и темами исследовательских и творческих работ, требованиями, предъявляемыми к участникам курса; повторить определение модуля числа, рассмотреть свойства и геометрический смысл модуля, способствовать выработке навыков в упрощении выражений, содержащих модуль.

Содержание занятия

I. Беседа. (Цели и задачи курса, требования, предъявляемые к участникам курса, литература для учащихся, темы исследовательских и творческих работ).

II. Беседа.

Определение. Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют само число a , если оно неотрицательное, и число противоположное a , если a отрицательное.

Модуль числа a обозначают $|a|$.

$$\text{Итак, } |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения следует, что при любом a $|a| \geq 0$.

Примеры.

$$|4| = 4, |-7| = 7, |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}, |\sqrt{7} - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - \sqrt{7}.$$

Отметим, что термин "модуль" (от лат. *modulus* – мера) ввел английский математик Р. Котес (1682 – 1716), а знак модуля – немецкий математик К. Вейерштрасс (1815 – 1897) в 1841 г.

Отметим некоторые свойства модуля.

1. $|-a| = |a|$.

2. $|a|^2 = a^2$.

3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Докажем это свойство, рассмотрев все случаи:

а) если хотя бы одно из чисел равно нулю ($a = 0$ или $b = 0$), то, очевидно, $|ab| = |a| \cdot |b| = 0$.

б) если $a > 0$ и $b > 0$, то $a = |a|$, $b = |b|$, $ab > 0$. Значит, $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.

в) если $a < 0$ и $b < 0$, то $-a = |a|$, $-b = |b|$, $ab > 0$. Значит, $|ab| = ab = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

г) если $a > 0$ и $b < 0$ ($a < 0$ и $b > 0$), то $a = |a|$, $-b = |b|$ ($-a = |a|$, $b = |b|$), $ab < 0$. Значит, $|ab| = -ab = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$ ($|ab| = -ab = |a| \cdot |b|$).

Свойство 3 доказано.

$$4. \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}, \text{ где } b \neq 0.$$

$$5. |a+b| = |a|+|b| \text{ тогда и только тогда, когда } ab \geq 0.$$

$$6. |a-b| = |a|+|b| \text{ тогда и только тогда, когда } ab \leq 0.$$

$$7. |a|+|b| = a+b \text{ тогда и только тогда, когда } a \geq 0 \text{ и } b \geq 0.$$

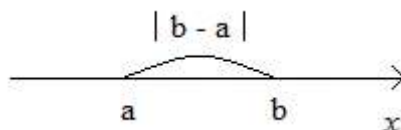
8. Для любых $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ справедливо неравенство $|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$.

$$9. \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

$$10. |a|-|b| \geq 0 \text{ тогда и только тогда, когда } a^2 - b^2 \geq 0.$$

Геометрически $|a|$ означает расстояние на числовой прямой от точки, изображающей число a , до начала отсчета (нуля).

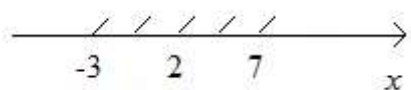
Для двух точек a и b числовой прямой модуль разности $|b-a|$ равен расстоянию между точками a и b .



Эти геометрические представления очень полезны при решении задач, а в простейших случаях позволяют дать ответ сразу, не прибегая к стандартному методу, который мы рассмотрим позже.

Например, решая уравнение $|x-1|=2$, можно $|x-1|$ рассматривать как расстояние между точками x и 1 на числовой прямой. Поэтому необходимо указать на числовой прямой все точки, находящиеся на расстоянии 2 от точки 1 , то есть $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

При решении неравенства $|x-2| \leq 5$ нужно найти на числовой прямой такие точки x , которые удалены от точки 2 на расстояние, меньшее или равное 5 . Это все точки, принадлежащие отрезку $[-3; 7]$



III. Решение упражнений.

1. Упростить выражение $\frac{a^2 - 16}{|a| + 4}$.

Решение.

I способ.

Задачи, связанные с абсолютной величиной, решаются, как правило, стандартным приемом – «освобождением от модуля»: в соответствии с определением рассматриваются все случаи распределения знаков выражений, стоящих под знаком модуля, и в каждом из этих случаев каждый модуль «раскрывается», то есть заменяется либо самим выражением, либо противоположным ему по знаку, после чего получается задача, в которой знака модуля нет.

Дробь определена для любых значений a .

$$\text{При } a \geq 0 \quad \frac{a^2 - 16}{|a| + 4} = \frac{a^2 - 16}{a + 4} = \frac{(a - 4)(a + 4)}{a + 4} = a - 4;$$

$$\text{при } a < 0 \quad \frac{a^2 - 16}{|a| + 4} = \frac{a^2 - 16}{-a + 4} = \frac{(a - 4)(a + 4)}{-(a - 4)} = -(a + 4) = -a - 4.$$

II способ.

Воспользуемся свойством $|a|^2 = a^2$:

$$\frac{a^2 - 16}{|a| + 4} = \frac{|a|^2 - 16}{|a| + 4} = \frac{(|a| - 4)(|a| + 4)}{|a| + 4} = |a| - 4.$$

Ответ: $a - 4$ при $a \geq 0$; $-a - 4$ при $a < 0$.

2. Упростить выражение $\frac{x^2 - |x| + 1 - x}{|x - 1|}$.

Решение.

Чтобы упростить данное выражение, необходимо раскрыть модули. Для этого выделим интервалы, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, принимают только положительные или отрицательные значения. Отыскание таких интервалов основано на *теореме*:

Если на интервале (a, b) функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет знак.

Дробь определена для $x \neq 1$.

Чтобы выделить интервалы знакопостоянства, найдем точки, в которых выражения, записанные под модулем, обращаются в нуль: $x = 0$; $x - 1 = 0$, $x = 1$. Полученные точки разобьют числовую прямую на искомые интервалы. Определим знаки выражений x , $x - 1$ на этих интервалах:

$$\begin{array}{ccccccc} x: & & - & & + & & + & & \rightarrow \\ & & & & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & x & \end{array}$$

Учитывая знаки, раскроем модули:

$$\begin{aligned} \text{при } x < 0 & \quad \frac{x^2 - |x| + 1 - x}{|x-1|} = \frac{x^2 + x + 1 - x}{-(x-1)} = \frac{x^2 + 1}{1-x}; \\ \text{при } 0 \leq x < 1 & \quad \frac{x^2 - |x| + 1 - x}{|x-1|} = \frac{x^2 - x + 1 - x}{-(x-1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{1-x} = \frac{(x-1)^2}{1-x} = 1-x; \\ \text{при } x > 1 & \quad \frac{x^2 - |x| + 1 - x}{|x-1|} = \frac{x^2 - x + 1 - x}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x^2 + 1}{1-x}$ при $x < 0$; $1-x$ при $0 \leq x < 1$; $x-1$ при $x > 1$.

Замечание: использованный прием решения называется методом интервалов.

IV. Самостоятельное решение со взаимопроверкой по вариантам.

I вариант: упростить выражение $\frac{|x+3|}{x^2-9}$.

Ответ: $\frac{1}{3-x}$ при $x < -3$; $\frac{1}{x-3}$ при $x > -3$.

II вариант: упростить выражение $\frac{|2-x|}{4-x^2}$.

Ответ: $\frac{1}{x+2}$ при $x < 2$; $-\frac{1}{x+2}$ при $x > 2$.

Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 1 – № 5.

Занятие 2

Преобразование выражений, содержащих модуль.

Цели: закрепить изученный материал; способствовать выработке навыков в упрощении выражений, содержащих модуль.

Содержание занятия

I. Решение упражнений.

1. Упростить выражение $\left| \frac{|x-2|+4}{x-2} \right| \cdot (x^2-4)$.

Решение.

Дробь определена для $x \neq 2$.

Найдем нули выражения $x-2$: $x=2$.

Разобьем числовую прямую на интервалы и установим знак выражения $x-2$ на каждом интервале:

$$x-2: \begin{array}{c} - \quad + \\ \hline 2 \qquad x \end{array}$$

Раскроем модуль:

При $x < 2$

$$\left| \frac{2-x+4}{x-2} \right| \cdot (x^2-4) = \left| \frac{6-x}{x-2} \right| \cdot (x^2-4) = \frac{|6-x|}{|x-2|} \cdot (x^2-4) = \frac{6-x}{2-x} \cdot (x^2-4) = \frac{(6-x)(x-2)(x+2)}{2-x} =$$

$$= -(6-x)(x+2) = (x-6)(x+2) = x^2 - 4x - 12;$$

при $x > 2$

$$\left| \frac{x-2+4}{x-2} \right| \cdot (x^2-4) = \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \cdot (x^2-4) = \frac{|x+2|}{|x-2|} \cdot (x^2-4) = \frac{(x+2)(x-2)(x+2)}{x-2} = (x+2)^2 =$$

$$= x^2 + 4x + 4.$$

Ответ: $x^2 - 4x - 12$ при $x < 2$; $x^2 + 4x + 4$ при $x > 2$.

2. Упростить выражение $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

Решение.

$$\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}} = \sqrt{17-4\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}} = \sqrt{17-4 \cdot |2+\sqrt{5}|} = \sqrt{17-4 \cdot (2+\sqrt{5})} =$$

$$= \sqrt{17-8-4\sqrt{5}} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2.$$

Ответ: $\sqrt{5}-2$.

3. Упростить выражение $\sqrt{(b+2)^2-8b} : (\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}})$.

Решение.

При $b > 0$ получим:

$$\sqrt{(b+2)^2-8b} : (\sqrt{b}-\frac{2}{\sqrt{b}}) = \sqrt{b^2-4b+4} : \frac{b-2}{\sqrt{b}} = \sqrt{(b-2)^2} \cdot \frac{\sqrt{b}}{b-2} = \frac{|b-2| \cdot \sqrt{b}}{b-2}.$$

Ответ: \sqrt{b} , если $b > 2$; $-\sqrt{b}$, если $0 < b < 2$.

4. Доказать, что значение выражения $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$ — целое

число.

Решение.

$$\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1} = \frac{(\sqrt{7+\sqrt{24}}-1) - (\sqrt{7-\sqrt{24}}+1)}{(\sqrt{7-\sqrt{24}}+1)(\sqrt{7+\sqrt{24}}-1)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{(1+\sqrt{6})^2-1}) - (\sqrt{(1-\sqrt{6})^2+1})}{(\sqrt{(1-\sqrt{6})^2+1})(\sqrt{(1+\sqrt{6})^2-1})} = \frac{|1+\sqrt{6}|-1 - |1-\sqrt{6}|-1}{(1-\sqrt{6}+1)(1+\sqrt{6}-1)} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{6}-1 - \sqrt{6}+1-1}{6} = 0.$$

Ответ: 0.

II. Самостоятельное решение со взаимопроверкой по вариантам.

I вариант: упростить выражение $\sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

Ответ: $3\sqrt{2} + 5$.

II вариант: упростить выражение $\sqrt{15\sqrt{2} + 28 + 15\sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}}$.

Ответ: $3\sqrt{2} + 5$.

Задания для самостоятельной работы дома: № 6 – № 14.

Тема 2. Уравнения и неравенства, содержащие модуль (9 ч)

Занятие 3

Решение уравнений, содержащих модуль.

Решение уравнений вида $f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = g(x)$.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов уравнений, содержащих модуль; способствовать выработке навыков решения уравнений вида $f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = g(x)$.

Содержание занятия

При решении уравнения, содержащего знак модуля, как правило, следует разбить ОДЗ уравнения на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение записать без знака модуля и решить на этом множестве. Объединение множеств решений, найденных на всех частях ОДЗ уравнения, составляет множество всех решений уравнения.

1. Простейшими уравнениями с модулями являются уравнения вида

$$f(|x|) = g(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

Для того чтобы решить уравнение (1), нужно найти сначала все решения уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащие множеству $x \geq 0$, затем решить уравнение $f(-x) = g(x)$ на множестве $x < 0$; объединение множеств найденных решений составляет множество всех решений уравнения (1). Другими словами, уравнение (1) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Пример 1.

Решить уравнение $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

Решение.

Исходное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет два решения: $x_1 = 2, x_2 = 3$, каждое из которых неотрицательно; поэтому числа 2 и 3 являются решением первой системы совокупности.

Уравнение $x^2 + 5x + 6 = 0$ имеет решения $x_3 = -2, x_4 = -3$, которые являются решениями второй системы совокупности, поскольку $x_3 < 0$ и $x_4 < 0$.

Следовательно, решением исходного уравнения являются числа $-3, -2, 2, 3$.

Ответ: $-3, -2, 2, 3$.

Замечание: данное уравнение можно решить, используя метод замены неизвестного. Положим $t = |x|$. Тогда данное уравнение можно записать следующим образом: $t^2 - 5t + 6 = 0$ (так как $|x|^2 = x^2$). Решением этого уравнения являются два положительных числа 2 и 3, поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $|x| = 2, |x| = 3$, решая которую, получим решение исходного уравнения.

$$2. \text{ Уравнения вида } |f(x)| = g(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции.

I способ.

Уравнение (2) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

II способ.

Уравнение (2) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Если в уравнении (2) функция $f(x)$ имеет более простой вид, чем $g(x)$, то целесообразно уравнение (2) заменить первой совокупностью систем; если более простой вид имеет функция $g(x)$, то уравнение (2) целесообразно заменить второй совокупностью систем.

В частности, уравнение вида $|f(x)| = b, b \in R$

при $b < 0$ решений не имеет;

при $b = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

при $b > 0$ равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} f(x) = b, \\ f(x) = -b. \end{cases}$

Пример 2.

Решить уравнение $|2x - 3| = x + 1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2x-3 = x+1, \\ x+1 \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -(2x-3) = x+1, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности:

$$\begin{cases} 2x-3 = x+1, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad x = 4.$$

Решим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases} -(2x-3) = x+1, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3x = -2, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}; 4$.

Пример 3.

Решить уравнение $\left| \frac{x^2 - 6\sqrt{x} + 7}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} \right| = 1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 6\sqrt{x} + 7}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} = 1, \\ \frac{x^2 - 6\sqrt{x} + 7}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-12\sqrt{x}}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} = 0, \\ \frac{2x^2 + 14}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} = 0; \end{cases} \quad \sqrt{x} = 0; \quad x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 4.

Решить уравнение $|2x-3| = -(2x-3)$.

Решение.

Данное уравнение имеет вид $|f(x)| = -f(x)$, (3)

где $f(x) = 2x-3$.

Уравнение (3) равносильно неравенству $f(x) \leq 0$, таким образом, исходное уравнение равносильно неравенству $2x-3 \leq 0$. Решая его, находим решение исходного уравнения: $x \leq 1,5$.

Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 15 – № 18, № 21, № 23 – № 25, № 27, № 30, № 33.

Занятие 4

Решение уравнений вида $f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = g(x)$.

Цели: способствовать выработке навыков решения уравнений вида $f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = g(x)$.

Содержание занятия

I. Решение упражнений.

1. Решить уравнение $x^2 - \frac{4|x|}{x} = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 4 = 0; \\ x < 0, \\ x^2 + 4 = 0; \end{cases} \quad x = 2.$$

Ответ: 2.

2. Решить уравнение $x^2 - 12|x| + 35 = 0$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 12x + 35 = 0; \\ x < 0, \\ x^2 + 12x + 35 = 0. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 12x + 35 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5, \\ x = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ x = 7. \end{cases}$$

Решим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 12x + 35 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x = -7, \\ x = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7, \\ x = -5. \end{cases}$$

Ответ: $-7; -5; 5; 7$.

3. Решить уравнение $|3x - 5| = 4$.

Решение.

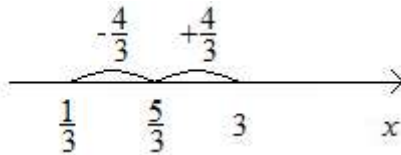
I способ.

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\begin{cases} 3x - 5 = 4, \\ 3x - 5 = -4. \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x-5=4, \\ 3x-5=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x=9, \\ 3x=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ x=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

II способ.

$$|3x-5|=4; \quad \left|3\left(x-\frac{5}{3}\right)\right|=4; \quad 3\left|x-\frac{5}{3}\right|=4; \quad \left|x-\frac{5}{3}\right|=\frac{4}{3}.$$



Ответ: $\frac{1}{3}; 3$.

4. Решить уравнение $|2x - x^2 + 3| = 1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} 2x - x^2 + 3 = 1, \\ 2x - x^2 + 3 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - x^2 + 3 = 1, \\ 2x - x^2 + 3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 = 0, \\ -x^2 + 2x + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3}, \\ x = 1 + \sqrt{3}, \\ x = 1 - \sqrt{5}, \\ x = 1 + \sqrt{5}. \end{cases}$$

Ответ: $1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{5}$.

5. Решить уравнение $|x| = x + 4$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} x \geq 0, \\ x = x + 4; \\ x < 0, \\ -x = x + 4. \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x = x + 4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ 0 = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = -2; \end{cases} \end{cases} \quad x = -2.$$

Ответ: -2 .

6. Решить уравнение $|3 - 2x| = 3x$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем $\left[\begin{cases} 3-2x=3x, \\ 3x \geq 0; \\ 3-2x=-3x, \\ 3x \geq 0. \end{cases} \right.$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 3-2x=3x, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 3-2x=-3x, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \end{cases} \right. \left[\begin{cases} -5x=-3, \\ x \geq 0; \\ x=-3, \\ x \geq 0; \end{cases} \right. \quad x=0,6.$$

Ответ: 0,6.

7. Решить уравнение $|5-3x|=3x-5$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $|5-3x|=-(5-3x)$; последнее уравнение равносильно неравенству $5-3x \leq 0$; $-3x \leq -5$; $x \geq \frac{5}{3}$.

Ответ: $\left[1\frac{2}{3}; +\infty \right)$.

8. Решить уравнение $|x^2+x-1|=2x-1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x^2+x-1=2x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ -(x^2+x-1)=2x-1. \end{cases} \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x^2+x-1=2x-1; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ -(x^2+x-1)=2x-1; \end{cases} \end{cases} \right. \left[\begin{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x^2-x=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ -x^2-3x+2=0; \end{cases} \end{cases} \right. \left[\begin{matrix} x=1, \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}. \end{matrix} \right.$$

Ответ: $1; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

II. Самостоятельная работа.

| I вариант | II вариант |
|---|---------------------------|
| Решить уравнение: | Решить уравнение: |
| 1. $2x^2 - 5 x + 3 = 0$. | 1. $x^2 - 4 x + 3 = 0$. |
| Ответ: $-\frac{3}{2}; -1; 1; \frac{3}{2}$. | Ответ: $-3; -1; 1; 3$. |

| | |
|---|---|
| 2. $ x-7 =2$. Ответ: 5; 9. | 2. $ x-1 =3$. Ответ: -2; 4. |
| 3. $ 3x+1 =9-x$. Ответ: -5; 2. | 3. $ 3x-1 =7x+11$. Ответ: -1. |
| 4. $ x^2+x-3 =x$. Ответ: 1; $\sqrt{3}$. | 4. $ x^2-x-8 =-x$. Ответ: $-2\sqrt{2}; -2$. |
| 5. $\left \frac{x^2+2x+1}{x} \right = \frac{x^2+2x+1}{x}$. | 5. $\left \frac{2-x}{x-3} \right = \frac{x-2}{x-3}$. |
| Ответ: $\begin{cases} x > 0, \\ x = -1. \end{cases}$ | Ответ: $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$. |

Задания для самостоятельной работы дома: № 19, № 20, № 22, № 26, № 28, № 29, № 31, № 32, № 34.

Занятие 5

Решение уравнений, содержащих модуль.

Решение уравнений вида $|f(x)|=|g(x)|$, $h(|f(x)|)=g(x)$.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов уравнений, содержащих модуль; способствовать выработке навыков решения уравнений вида

$$|f(x)|=|g(x)|, h(|f(x)|)=g(x).$$

Содержание занятия

1. Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$.

На занятии 3 мы выяснили, что уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ будет равносильно совокупности двух уравнений $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ -f(x) = g(x). \end{cases}$

Пример 1.

Решить уравнение $|x-3|=|x+2|$.

Решение.

I способ.

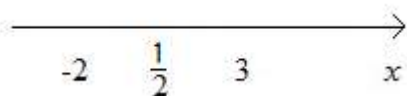
Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} x-3 = x+2, \\ -(x-3) = x+2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-3 = x+2, \\ -(x-3) = x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 5, \\ 2x = 1; \end{cases} \quad x = \frac{1}{2}.$$

II способ.

Запишем данное уравнение в виде $|x-3| = |x-(-2)|$. Исходя из геометрических представлений, нетрудно понять, что корнем уравнения является число, равноудаленное от точек -2 и 3 числовой прямой.



Ответ: $\frac{1}{2}$.

2. Уравнение вида $h(|f(x)|) = g(x)$,

где h, f, g - некоторые функции, равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} h(f(x)) = g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} h(-f(x)) = g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Пример 2.

Решить уравнение $\frac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ \frac{1-2x}{3-(x-1)} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 0, \\ \frac{1-2x}{3+(x-1)} = 1. \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{1-2x}{3-(x-1)} = 1$, находим $x_1 = -3$ - его корень. Но он не удовлетворяет условию $x-1 \geq 0$; поэтому первая система совокупности решений не имеет.

Решая уравнение $\frac{1-2x}{3+(x-1)} = 1$, находим $x_2 = -\frac{1}{3}$ - его корень, который удовлетворяет условию $x-1 < 0$, и поэтому число $-\frac{1}{3}$ является решением второй системы совокупности. Итак, единственным решением исходного уравнения является число $-\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

3. Уравнения, в которых под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль.

При решении уравнения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, следует сначала освободиться от внутренних модулей, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Пример 3.

Решить уравнение $|x - |4 - x|| - 2x = 4$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ |x - (4 - x)| - 2x = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 4 - x < 0, \\ |x + (4 - x)| - 2x = 4, \end{cases}$$

то есть совокупности систем

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ |2x - 4| - 2x = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ -2x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Вторая система совокупности (1) решений не имеет. Первая система совокупности (1) равносильна совокупности двух следующих систем

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 2x - 4 \geq 0, \\ 2x - 4 - 2x = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ 2x - 4 < 0, \\ -(2x - 4) - 2x = 4, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 2, \\ -4 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ x < 2, \\ -4x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Единственным решением совокупности (2), а значит, и исходного уравнения является число 0.

Ответ: 0.

4. Уравнение вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$, (3)

где $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), g(x)$ – некоторые функции.

Если это уравнение решать последовательным раскрытием знаков модулей, то после раскрытия одного знака модуля получается совокупность двух систем, после раскрытия второго знака модуля – совокупность четырех систем и т.д. Этот метод очень громоздкий. Такие уравнения проще решать методом интервалов. Для этого находят сначала все точки, в которых хотя бы одна из функций $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ меняет знак. Эти точки делят область допустимых значений уравнения (3) на промежутки, на каждом из которых все функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ сохраняют знак. Затем, используя определение модуля, переходят от уравнения (3) к совокупности систем, не содержащих знаков модуля.

Пример 4.

Решить уравнение $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$. (4)

Решение.

Чтобы выделить промежутки знакопостоянства, найдем точки, в которых выражения, записанные под модулем, обращаются в нуль:

$$3x - 8 = 0, x = \frac{8}{3}; 3x - 2 = 0, x = \frac{2}{3}.$$

Полученные точки разобьют числовую прямую на искомые интервалы. Определим знаки выражений $3x - 8, 3x - 2$ на этих интервалах:

$$3x - 8: \quad \begin{array}{c} - \quad - \quad + \\ \hline \frac{2}{3} \quad \frac{8}{3} \quad x \end{array}$$

$$3x - 2: \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad + \\ \hline \frac{2}{3} \quad \frac{8}{3} \quad x \end{array}$$

Таким образом, уравнение (4) равносильно совокупности трех систем

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3}, \\ -(3x - 8) + (3x - 2) = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq \frac{8}{3}, \\ -(3x - 8) - (3x - 2) = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{8}{3}, \\ (3x - 8) - (3x - 2) = 6, \end{cases}$$

то есть совокупности систем

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3}, \\ 6 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq \frac{8}{3}, \\ -6x = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{8}{3}, \\ -6 = 6. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все числа из промежутка $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Вторая и третья системы решений не имеют.

Итак, множеством всех решений исходного уравнения является промежуток $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 35, № 37, № 39, № 41, № 44, № 45, № 47, № 49.

Занятие 6

Решение уравнений, содержащих модуль.

Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|, h(|f(x)|) = g(x)$.

Цели: способствовать выработке навыков решения уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|, h(|f(x)|) = g(x)$.

Содержание занятия

I. Решение упражнений.

1. Решить уравнение $|4 - y| = |2y + 1|$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} 4 - y = 2y + 1, \\ 4 - y = -(2y + 1). \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4 - y = 2y + 1, & \begin{cases} -3y = -3, \\ y = -5; \end{cases} & \begin{cases} y = 1, \\ y = -5. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $-5; 1$.

2. Решить уравнение $|x - x^2 - 1| = |2x + 3 - x^2|$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} x - x^2 - 1 = 2x + 3 - x^2, \\ x - x^2 - 1 = -(2x + 3 - x^2). \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - x^2 - 1 = 2x + 3 - x^2, \\ x - x^2 - 1 = -(2x + 3 - x^2); \end{cases} \quad \begin{cases} -x = 4, \\ -2x^2 + 3x + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $-4; -\frac{1}{2}; 2$.

3. Решить уравнение $\frac{x^2 - 2x - 2}{|x - 3|} = 1$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 3} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 < 0, \\ \frac{x^2 - 2x - 2}{3 - x} = 1, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x > 3, \\ \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ \frac{x^2 - x - 5}{3 - x} = 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} = 0$, находим $x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ — его корни.

Но они не удовлетворяют условию $x > 3$; поэтому первая система совокупности решений не имеет.

Решая уравнение $\frac{x^2 - x - 5}{3 - x} = 0$, находим $x_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ — его кор-

ни, которые удовлетворяют условию $x < 3$, и поэтому числа $\frac{1 + \sqrt{21}}{2}$, $\frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ яв-

ляются решениями второй системы совокупности. Итак, решением исходного уравнения являются числа $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

4. Решить уравнение $||x|-2|=|x|$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ |x-2| = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ |-x-2| = -x. \end{cases} \quad (1)$$

Первая система совокупности (1) равносильна совокупности двух следующих систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ x-2 = x, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x-2 < 0, \\ 2-x = x, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2, \\ 0 = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 2, \\ x = 1, \end{cases}$$

единственным решением которой является число 1.

Вторая система совокупности (1) равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} x < 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x+2 = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x+2 < 0, \\ -x-2 = -x, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2, \\ x = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x < -2, \\ 0 = -2, \end{cases}$$

единственным решением которой является число -1 .

Ответ: $-1; 1$.

5. Решить уравнение $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$. (2)

Решение.

$x+1=0, x=-1; x=0; x-1=0, x=1; x-2=0, x=2$.

$x+1$: $\frac{-}{-1} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2} \frac{+}{x}$

x : $\frac{-}{-1} \frac{-}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2} \frac{+}{x}$

$$x - 1: \quad \begin{array}{ccccccc} & - & - & - & + & + & \\ & -1 & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & x \end{array} \rightarrow$$

$$x - 2: \quad \begin{array}{ccccccc} & - & - & - & - & + & \\ & -1 & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & x \end{array} \rightarrow$$

Таким образом, уравнение (2) равносильно совокупности пяти систем

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x < 0, \\ x + 1 + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x < 1, \\ x + 1 - x - 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x < 2, \\ x + 1 - x + 3(x-1) + 2(x-2) = x + 2; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \geq 2, \\ x + 1 - x + 3(x-1) - 2(x-2) = x + 2. \end{array} \right.$$

Последняя совокупность приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ -2x = 4; \\ -1 \leq x < 0, \\ 0 = 2; \\ 0 \leq x < 1, \\ -2x = 2; \\ 1 \leq x < 2, \\ 4x = 8; \\ x \geq 2, \\ 0 = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x < -1, \\ x = -2; \\ 0 \leq x < 1, \\ x = -1; \\ 1 \leq x < 2, \\ x = 2; \\ x \geq 2, \\ 0 = 0. \end{array} \right.$$

Решение совокупности систем и уравнения (2): $-2; x \geq 2$.

Ответ: $-2; [2; +\infty)$.

II. Самостоятельная работа.

| I вариант | II вариант |
|---|--|
| Решить уравнение: | Решить уравнение: |
| 1. $2 x+1 = x-3 $. | 1. $ x-2 = 3 x+3 $. |
| Ответ: $-5; \frac{1}{3}$. | Ответ: $-\frac{11}{2}; -\frac{7}{4}$. |
| 2. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x-5 } = 1$. | 2. $\frac{x^2 - x + 1}{ x+1 - x^2} = 1$. |

| | |
|---|--|
| <p>Ответ: $-\frac{2}{3}$.</p> <p>3. $1- 1-x = \frac{1}{2}$.</p> <p>Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}$.</p> <p>4. $5x-13 - 6-5x = 7$.</p> <p>Ответ: $\left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.</p> | <p>Ответ: 0; 1.</p> <p>3. $x-3- x = 4$.</p> <p>Ответ: $-\frac{1}{2}$.</p> <p>4. $3x-8 - 3x-2 = 6$.</p> <p>Ответ: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.</p> |
|---|--|

Задания для самостоятельной работы дома: № 36, № 38, № 40, № 42, № 43, № 46, № 48, № 50, № 51.

Занятие 7

Решение неравенств, содержащих модуль.

Решение неравенств вида $f(|x|) < g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов неравенств, содержащих модуль; способствовать выработке навыков решения неравенств вида

$$f(|x|) < g(x), |f(x)| < g(x), |f(x)| > g(x).$$

Содержание занятия

1. Неравенства вида $|x| < a$ ($|x| \leq a$), $|x| > a$ ($|x| \geq a$).

I. $a < 0$

Неравенства $|x| < a$, $|x| \leq a$ решений не имеют.

Решением неравенств $|x| > a$, $|x| \geq a$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

II. $a = 0$

Неравенство $|x| < a$ не имеет решений.

Неравенство $|x| \leq a$ имеет единственное решение $x = 0$.

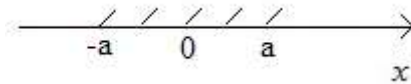
Решением неравенства $|x| > a$ является объединение двух промежутков $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Решением неравенства $|x| \geq a$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$.

III. $a > 0$

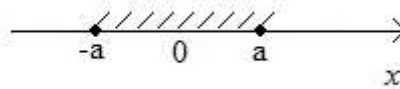
$$|x| < a$$

Так как геометрически $|x|$ означает расстояние от точки x числовой прямой до нуля, то решением данного неравенства является промежуток $(-a; a)$.



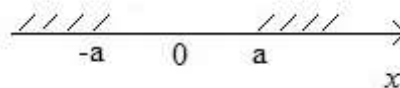
$$|x| \leq a$$

Решением данного неравенства является промежуток $[-a; a]$.



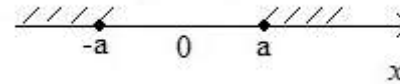
$$|x| > a$$

Решением данного неравенства является объединение промежутков $(-\infty; a) \cup (a; +\infty)$.



$$|x| \geq a$$

Решением данного неравенства является объединение промежутков $(-\infty; a] \cup [a; +\infty)$.



2. При решении неравенств, содержащих знак модуля, следует разбить область допустимых значений неравенства на множества, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве нужно решать неравенство и полученные решения объединять во множество решений исходного неравенства.

Пример 1.

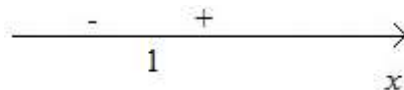
Решить неравенство $|x-1| < 2$. (1)

Решение.

I способ.

Разобьем числовую прямую на два промежутка и решим данное неравенство на каждом из них.

$x - 1$:



При $x < 1$ неравенство (1) примет вид $-(x-1) < 2$, то есть $-x < 1, x > -1$. С учетом условия $x < 1$ получаем, что промежуток $(-1; 1)$ входит во множество решений неравенства (1).

При $x \geq 1$ неравенство (1) примет вид $x-1 < 2$, то есть $x < 3$. С учетом условия $x \geq 1$ получаем, что промежуток $[1; 3)$ входит во множество решений неравенства (1).

Объединяя решения, полученные на каждом из промежутков, находим множество решений неравенства (1) – промежуток $(-1; 3)$.

II способ.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны при всех x и так как $|x-1|^2 = (x-1)^2$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получим неравенство $x^2 - 2x + 1 < 4$, то есть $x^2 - 2x - 3 < 0$, равносильное данному неравенству. Решая это неравенство, находим, что промежуток $(-1; 3)$ является решением неравенства (1).

III способ.

$|x-1|$ можно рассматривать как расстояние между точками 1 и x числовой прямой. Значит, решением данного неравенства будет множество всех тех точек, которые удалены от точки 1 на расстояние, меньшее, чем две единицы. На числовой прямой есть две точки, удаленные от точки 1 на две единицы. Это точки -1 и 3 . Значит, искомое решение – промежуток $(-1; 3)$.

Ответ: $(-1; 3)$.

3. Когда раскрытие модуля сопряжено с техническими трудностями, удобно пользоваться равносильными неравенствами.

Неравенство вида $f(|x|) < g(x)$,

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(-x) < g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Пример 2.

Решить неравенство $x^2 - 2|x| < 3$. (2)

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Так как $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, то множеством решений неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$ является промежуток $(-1; 3)$. Следовательно, решением первой системы совокупности является промежуток $[0; 3)$.

Так как $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, то множеством решений неравенства $x^2 + 2x - 3 < 0$ является промежуток $(-3; 1)$. Отсюда заключаем, что решением второй системы совокупности является промежуток $(-3; 0)$.

Объединяя полученные множества решений двух систем, получаем множество решений неравенства (2) – $(-3; 3)$.

Ответ: $(-3; 3)$.

4. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$,

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

Для тех x , при которых $g(x) \leq 0$, данное неравенство решений не имеет.

В частности, неравенство $|f(x)| < a$ при $a \leq 0$ решений не имеет, а при $a > 0$ оно равносильно системе $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$

Пример 3.

Решить неравенство $|x^2 - 4x| < 5$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4x < 5, \\ x^2 - 4x > -5. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 5, \\ x^2 - 4x > -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ x^2 - 4x + 5 > 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 - 4x - 5 < 0$ является промежуток $(-1; 5)$, а неравенство $x^2 - 4x + 5 > 0$ выполняется при любом x . Таким образом, множество решений исходного неравенства есть интервал $(-1; 5)$.

Ответ: $(-1; 5)$.

5. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$,

где $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции, равносильно совокупности двух неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Все те x из ОДЗ неравенства $|f(x)| > g(x)$, для которых $g(x) < 0$, входят во множество решений неравенства $|f(x)| > g(x)$.

В частности, неравенство $|f(x)| > a$ равносильно совокупности двух неравенств $\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$

Если $a < 0$, то неравенство $|f(x)| > a$ выполняется при любом допустимом значении x данного неравенства.

Пример 4.

Решить неравенство $3|x-1| > 7-x^2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} 3(x-1) > 7-x^2, \\ 3(x-1) < -(7-x^2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x-1) > 7-x^2, & \begin{cases} x^2+3x-10 > 0, \\ x^2-3x-4 > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Так как $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$, то неравенство $x^2+3x-10 > 0$ выполняется при $x < -5$ и $x > 2$.

Так как $x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$, то неравенство $x^2-3x-4 > 0$ выполняется при $x < -1$ и $x > 4$.

Следовательно, множество решений совокупности (3), а значит, и исходного неравенства состоит из объединения двух промежутков $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 52 – № 55, № 60 – № 70, № 73 – № 76, № 79, № 80.

Занятие 8

Решение неравенств, содержащих модуль.

Решение неравенств вида $f(|x|) < g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$.

Цели: способствовать выработке навыков решения неравенств вида $f(|x|) < g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$.

Содержание занятия

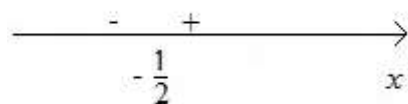
I. Решение упражнений.

1. Решить неравенство $|2x+1| > 3$. (1)

Решение.

I способ.

$$2x + 1:$$



При $x < -\frac{1}{2}$ неравенство (1) примет вид $-2x-1 > 3$, то есть $-2x > 4$, $x < -2$.

Итак, промежуток $(-\infty; -2)$ входит во множество решений неравенства (1).

При $x \geq -\frac{1}{2}$ неравенство (1) примет вид $2x+1 > 3$, то есть $2x > 2$, $x > 1$. Итак, промежуток $(1; +\infty)$ входит во множество решений неравенства (1).

Объединяя решения, полученные на каждом из промежутков, находим множество решений неравенства (1) – $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

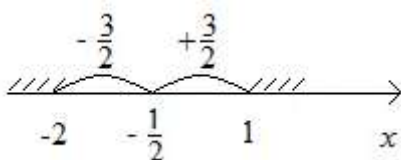
II способ.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны при всех x и так как $|2x+1|^2 = (2x+1)^2$, то после возведения в квадрат обеих частей неравенства получим неравенство $4x^2 + 4x - 8 > 0$, то есть $x^2 + x - 2 > 0$, равносильное данному неравенству. Решая это неравенство, находим, что объединение промежутков $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ является решением неравенства (1).

III способ.

$$|2x+1| > 3, \left|2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| > 3, 2\left|x + \frac{1}{2}\right| > 3, \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| > \frac{3}{2}.$$

Значит, решением данного неравенства будет множество всех тех точек, которые удалены от точки $-\frac{1}{2}$ на расстояние, большее, чем $\frac{3}{2}$.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

2. Решить неравенство $x^2 - |x| \geq 2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Так как $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, то множеством решений неравенства $x^2 - x - 2 \geq 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. Следовательно, решением первой системы совокупности является промежуток $[2; +\infty)$.

Так как $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, то множеством решений неравенства $x^2 + x - 2 \geq 0$ является объединение промежутков $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. Следовательно, решением первой системы совокупности является промежуток $(-\infty; -2]$.

Объединяя полученные множества решений двух систем, получаем множество решений неравенства – $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

3. Решить неравенство $|x^2 - 5x| \leq 6$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ является промежуток $[-1; 6]$, а решением неравенства $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ является объединение промежутков $(-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Таким образом, множество решений исходного неравенства есть объединение промежутков $[-1; 2] \cup [3; 6]$.

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 6]$.

4. Решить неравенство $|x - 6| \geq x^2 - 5x + 9$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\begin{cases} x - 6 \geq x^2 - 5x + 9, \\ x - 6 \leq -(x^2 - 5x + 9). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6 \geq x^2 - 5x + 9, & \begin{cases} x^2 - 6x + 15 \leq 0, \\ -x^2 + 4x - 3 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Первое неравенство совокупности решений не имеет.

Так как $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, то неравенство $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ выполняется при $1 \leq x \leq 3$.

Следовательно, множеством решений совокупности, а значит, и исходного неравенства является промежуток $[1; 3]$.

Ответ: $[1; 3]$.

II. Самостоятельная работа.

| I вариант | II вариант |
|--|--|
| <p>Решить неравенство:</p> <p>1. $x^2 + 2 x - 15 \geq 0$. Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.</p> <p>2. $x^2 - 6x + 8 \leq 4 - x$. Ответ: $4; [1; 3]$.</p> <p>3. $x^2 - 3x + 2 > x + 3$. Ответ: $(-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}; +\infty)$.</p> | <p>Решить неравенство:</p> <p>1. $x^2 - 7 x + 10 \leq 0$. Ответ: $[-5; -2] \cup [2; 5]$.</p> <p>2. $x^2 - x - 8 \leq x$. Ответ: $[2\sqrt{2}; 4]$.</p> <p>3. $x^2 + 4x + 3 > x + 3$. Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$.</p> |

Задания для самостоятельной работы дома: № 56 – № 59, № 71, № 72, № 77, № 78, № 81 – № 91.

Занятие 9

Решение неравенств, содержащих модуль.

Решение неравенств вида $|f(|x|)| < g(x), |f(|x|)| > g(x), |f(x)| \geq |g(x)|, h(x, |f(x)|) < g(x)$.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов неравенств, содержащих модуль; способствовать выработке навыков решения неравенств вида

$$|f(|x|)| < g(x), |f(|x|)| > g(x), |f(x)| \geq |g(x)|, h(x, |f(x)|) < g(x).$$

Содержание занятия

1. Неравенство вида $|f(|x|)| < g(x)$

можно решить двумя способами:

оно равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |f(x)| < g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |f(-x)| < g(x), \\ x < 0, \end{cases}$$

а также равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(|x|) < g(x), \\ f(|x|) > -g(x). \end{cases}$

Выбор способа решения зависит от конкретного неравенства и от сложности функций f и g .

Пример 1.

Решить неравенство $\|x| - 1| < 1 - x$. (1)

Решение.

I способ.

Неравенство (1) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |x-1| < 1-x, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |-x-1| < 1-x, \\ x < 0. \end{cases}$$

Неравенство $|x-1| < 1-x$ первой системы равносильно системе

$$\begin{cases} x-1 < 1-x, \\ x-1 > -(1-x), \end{cases}$$

то есть системе

$$\begin{cases} 2x < 2, \\ 0 > 0, \end{cases}$$

которая решений не имеет. Следовательно, не имеет решений и первая система совокупности.

Неравенство $|-x-1| < 1-x$ равносильно неравенству $|x+1| < 1-x$, которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 < 1-x, \\ x+1 > -(1-x); \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 0, \\ 0 > -2; \end{cases} \quad x < 0.$$

Значит, множество $(-\infty; 0)$ является множеством решений второй системы совокупности и неравенства (1).

II способ.

Неравенство $\left||x|-1\right| < 1-x$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |x|-1 < 1-x, & \begin{cases} |x|+x-2 < 0, \\ |x|-1 > -(1-x); \end{cases} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} |x|-x > 0. \end{cases}$$

Неравенство $|x|-x > 0$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x-x > 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -x-x > 0, \\ x < 0, \end{cases}$$

решением которой является интервал $(-\infty; 0)$.

Таким образом, неравенство $|x|+x-2 < 0$ нужно решать только при $x < 0$. При таких x оно принимает вид $-2 < 0$; следовательно, множеством решений неравенства (1) являются все числа промежутка $(-\infty; 0)$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

2. Неравенство вида $|f(|x|)| > g(x)$ можно решать двумя способами:

оно равносильно совокупности неравенств $\begin{cases} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x), \end{cases}$

а также равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} |f(x)| > g(x), \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} |f(-x)| > g(x), \\ x < 0. \end{cases}$$

Пример 2.

Решить неравенство $\left|1 - \frac{|x|}{1+|x|}\right| \geq \frac{1}{2}$. (2)

Решение.

Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех действительных чисел. Неравенство (2) равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \left|1 - \frac{x}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \left|1 - \frac{-x}{1-x}\right| \geq \frac{1}{2}, \\ x < 0. \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} \left|1 - \frac{x}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left|\frac{1}{1+x}\right| \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1-x}{1+x} \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 1$.

Решим вторую систему неравенств. Первое неравенство системы равносильно неравенству $\left|\frac{1}{1-x}\right| \geq \frac{1}{2}$. Если $x < 0$, то $1-x > 0$, следовательно, вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{2}, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 0; \end{cases} \quad -1 \leq x < 0.$$

Таким образом, множество всех решений исходного неравенства (2) состоит из чисел промежутка $[-1; 1]$.

Ответ: $[-1; 1]$.

3. Неравенство вида $|f(x)| \geq |g(x)|$ (3)

решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком знакопостоянства как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака модуля. Объединяя найденные решения на всех частях ОДЗ исходного неравенства, получаем множество всех его решений.

Также решаются и неравенства более общего вида

$$\alpha_1|f_1(x)| + \alpha_2|f_2(x)| + \dots + \alpha_n|f_n(x)| \geq g(x),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые действительные числа.

Некоторые неравенства вида (3) целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $f^2(x) \geq g^2(x)$.

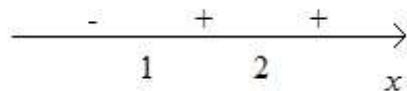
Пример 3.

Решить неравенство $|x-1| + |2-x| > 3+x$.

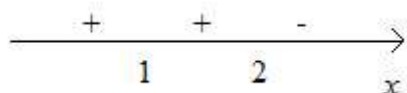
Решение.

Точки $x=1$ и $x=2$ делят числовую прямую (ОДЗ неравенства) на три промежутка: $x < 1, 1 \leq x \leq 2, x > 2$.

$x - 1$:



$2 - x$:



Решим данное неравенство на каждом из этих промежутков:

если $x < 1$, то исходное неравенство примет вид $-(x-1) + 2 - x > 3 + x$, то есть $-x > 0, x < 0$.

Таким образом, в этом случае решениями исходного неравенства являются все отрицательные числа.

Если $1 \leq x \leq 2$, то имеем

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 2, \\ x - 1 + 2 - x > 3 + x; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 2, \\ x < -2. \end{cases}$$

Полученная система неравенств решений не имеет. Следовательно, на отрезке $[1; 2]$ исходное неравенство решений не имеет.

Если $x > 2$, то имеем

$$\begin{cases} x > 2, \\ x-1-(2-x) > 3+x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x > 6; \end{cases} \quad x > 6.$$

Объединяя найденные решения на всех частях ОДЗ исходного неравенства, получаем его решение – множество $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

4. Неравенство вида $h(x, |f(x)|) < g(x)$

равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} h(x, f(x)) < g(x), \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} h(x, -f(x)) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases}$$

Аналогично совершается переход к равносильным совокупностям систем и для неравенств вида $h(x, |f(x)|) > g(x)$, $h(x, |f(x)|) \geq g(x)$.

Пример 4.

Решить неравенство $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \frac{x-3}{x^2-5x+6} \geq 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ \frac{-(x-3)}{x^2-5x+6} \geq 2. \end{cases}$$

Для первой системы этой совокупности получаем:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \frac{x-3}{(x-2)(x-3)} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 > 0, \\ \frac{1}{x-2} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ \frac{5-2x}{x-2} \geq 0. \end{cases}$$

Полученная система решений не имеет.

Решим вторую систему совокупности. Имеем:

$$\begin{cases} x-3 < 0, \\ \frac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ -\frac{1}{x-2} \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ -\frac{2x+3}{x-2} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x - \frac{3}{2} \leq 0; \end{cases} \quad \frac{3}{2} \leq x < 2.$$

Таким образом, решениями исходного неравенства являются все числа x из промежутка $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 92, № 94, № 96, № 98, № 99, № 100, № 102 – № 108, № 113.

Занятие 10

Решение неравенств, содержащих модуль.

Решение неравенств вида $|f(|x|)| < g(x), |f(|x|)| > g(x), |f(x)| \geq |g(x)|, h(x, |f(x)|) < g(x)$.

Цели: способствовать выработке навыков решения неравенств вида $|f(|x|)| < g(x), |f(|x|)| > g(x), |f(x)| \geq |g(x)|, h(x, |f(x)|) < g(x)$.

Содержание занятия

I. Решение упражнений.

1. Решить неравенство $|2x+1-|3x+1|| \leq x+2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0, \\ |2x+1-(3x+1)| \leq x+2, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+1 < 0, \\ |2x+1+(3x+1)| \leq x+2. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности:

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0, \\ |2x+1-(3x+1)| \leq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ |-x| \leq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3}, \\ |x| \leq x+2. \end{cases}$$

Неравенство $|x| \leq x+2$ равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x \leq x+2, \\ x \geq -(x+2); \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq 2, \\ 2x \geq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq 2, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad x \geq -1.$$

Таким образом, решением первой системы совокупности является промежуток $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Решим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases} 3x+1 < 0, \\ |2x+1+(3x+1)| \leq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+1 < 0, \\ |5x+2| \leq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{3}, \\ |5x+2| \leq x+2. \end{cases}$$

Неравенство $|5x+2| \leq x+2$ равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 5x+2 \leq x+2, \\ 5x+2 \geq -(x+2); \end{cases} \quad \begin{cases} 4x \leq 0, \\ 6x \geq -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq -\frac{2}{3}; \end{cases} \quad -\frac{2}{3} \leq x \leq 0.$$

Таким образом, решением второй системы совокупности является промежуток $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

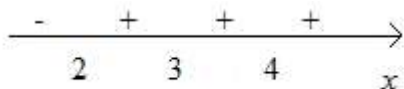
Итак, решением совокупности является промежуток $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

2. Решить неравенство $|x-2|+|x-3|+|2x-8| < 9$.

Решение.

$x - 2$:



$$\begin{array}{l}
 x - 3: \quad \begin{array}{ccccccc} & - & & - & & + & & + & & \rightarrow \\ & & 2 & & 3 & & 4 & & x & \\ & & & & & & & & & \end{array} \\
 2x - 8: \quad \begin{array}{ccccccc} & - & & - & & - & & + & & \rightarrow \\ & & 2 & & 3 & & 4 & & x & \\ & & & & & & & & & \end{array}
 \end{array}$$

Если $x < 2$, то исходное неравенство примет вид $-(x-2)-(x-3)-(2x-8) < 9$, то есть $-x+2-x+3-2x+8 < 9$. С учетом условия $x < 2$ получаем, что решением исходного неравенства являются все числа x из промежутка $(1; 2)$.

Если $2 \leq x \leq 3$, то исходное неравенство примет вид $x-2-(x-3)-(2x-8) < 9$, то есть $-2x < 0, x > 0$. С учетом условия $2 \leq x \leq 3$ получаем, что решением исходного неравенства являются все числа x из промежутка $[2; 3]$.

Если $3 < x \leq 4$, то исходное неравенство примет вид $x-2+x-3-(2x-8) < 9$, то есть $3 < 9$. В этом случае получаем, что решением исходного неравенства являются все числа x из промежутка $(3; 4]$.

Если $x > 4$, то исходное неравенство примет вид $x-2+x-3+2x-8 < 9$, то есть $4x < 22, x < \frac{22}{4}, x < \frac{11}{2}$. С учетом условия $x > 4$ получаем, что решением исходного неравенства являются все числа x из промежутка $\left(4; \frac{11}{2}\right)$.

Объединяя найденные решения на всех промежутках, получаем решение исходного неравенства $\left(1; \frac{11}{2}\right)$.

Ответ: $\left(1; \frac{11}{2}\right)$.

3. Решить неравенство $\frac{x + \sqrt{9 - 36x + 36x^2}}{x^2 - 5x + 6} \leq 2$.

Решение.

$$\frac{x + \sqrt{9 - 36x + 36x^2}}{x^2 - 5x + 6} \leq 2, \quad \frac{x + \sqrt{(3 - 6x)^2}}{x^2 - 5x + 6} \leq 2, \quad \frac{x + |3 - 6x|}{x^2 - 5x + 6} \leq 2.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} \frac{x + 3 - 6x}{(x - 2)(x - 3)} \leq 2, \\ 3 - 6x \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x - 3 + 6x}{(x - 2)(x - 3)} \leq 2, \\ 3 - 6x < 0, \end{cases}$$

то есть совокупности

$$\begin{cases} \frac{-2x^2 + 5x - 9}{(x-2)(x-3)} \leq 0, \\ x \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2x^2 + 17x - 15}{(x-2)(x-3)} \leq 0, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решением первой системы совокупности является промежуток $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Решением второй системы совокупности является объединение промежутков $\left(\frac{1}{2}; 1\right] \cup (2; 3) \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup \left[\frac{15}{2}; +\infty\right)$.

II. Самостоятельная работа.

| I вариант | II вариант |
|---|---|
| <p>Решить неравенство:</p> <p>1. $2x - 3 - x - 2 \leq 4$.</p> <p>Ответ: $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.</p> <p>2. $x - 1 - x - 2 + x + 1 > x + 2 + x - 3$.</p> <p>Ответ: $(-3; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 3)$.</p> <p>3. $\left -\frac{5}{x+2}\right < \left \frac{10}{x-1}\right$.</p> <p>Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.</p> | <p>Решить неравенство:</p> <p>1. $2x - x + 3 + 1 > 2$.</p> <p>Ответ: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.</p> <p>2. $x - 1 - x - 2 + x - 3 \leq 3 + x - 4 - x - 5$.</p> <p>Ответ: $[0; 6]$.</p> <p>3. $\left \frac{3}{2x-7}\right < \left -\frac{6}{x+4}\right$.</p> <p>Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (6; +\infty)$.</p> |

Задания для самостоятельной работы дома: № 93, № 95, № 97, № 101, № 109 – № 112, № 114, № 115.

Занятие 11

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль.

Цели: продолжить решение задач по изучаемой теме; рассмотреть решение более сложных упражнений; проверить усвоение учащимися изученного материала.

Содержание занятия

1. Решить уравнение $(x^2 - 5x + 6)^2 + 3|x - 3| = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения – сумма двух неотрицательных величин, значит, равенство нулю возможно тогда и только тогда, когда одновременно оба слагаемых обращаются в нуль.

Таким образом, данное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x + 6)^2 = 0, \\ 3|x - 3| = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ |x - 3| = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x = 3; \\ x = 3; \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

2. Решить уравнение $|||x| - 1| - 2| - 3| = 3$.

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} |||x| - 1| - 2| - 3 = 3, \\ |||x| - 1| - 2| - 3 = -3; \end{cases}$

$$\begin{cases} |||x| - 1| - 2| = 6, \\ |||x| - 1| - 2| = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решим первое уравнение совокупности (1):

Первое уравнение совокупности (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} ||x| - 1| - 2 = 6, \\ ||x| - 1| - 2 = -6; \end{cases}$$
$$\begin{cases} ||x| - 1| = 8, \\ ||x| - 1| = -4. \end{cases}$$

Уравнение $||x| - 1| = -4$ решений не имеет.

Уравнение $||x| - 1| = 8$ равносильно совокупности $\begin{cases} |x| - 1 = 8, \\ |x| - 1 = -8; \end{cases} \quad |x| = 9; \quad x = \pm 9.$

Решим второе уравнение совокупности (1):

Второе уравнение совокупности (1) равносильно уравнению $|||x| - 1| - 2| = 0$,

тогда $||x| - 1| = 2$; $\begin{cases} |x| - 1 = 2, \\ |x| - 1 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = 3, \\ |x| = -1; \end{cases} \quad |x| = 3; \quad x = \pm 3.$

Ответ: $-9; -3; 3; 9$.

3. Решить уравнение $(x + 2)^2 = 2|x + 2| + 3$.

Решение.

Пусть $|x + 2| = t$, тогда $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 3$.

Вернемся к переменной x : $|x+2| = -1$ или $|x+2| = 3$. Уравнение $|x+2| = -1$ решений не имеет; уравнение $|x+2| = 3$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x+2=3, \\ x+2=-3; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ x=-5. \end{cases}$$

Ответ: $-5; 1$.

4. Дано: $|a| < 1, |b-1| < 10, |c-a| < 10$.

Доказать: $|ab-c| < 20$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} |ab-c| &= |ab-a+a-c| = |a(b-1) + (a-c)| \leq |a(b-1)| + |a-c| = \\ &= |a| \cdot |b-1| + |c-a| < 1 \cdot 10 + 10 = 20. \end{aligned}$$

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x+y| = 5, \\ |x|+|y| = 7. \end{cases}$

Решение.

Возводя каждое уравнение в квадрат, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 + 2|xy| + y^2 = 49, \end{cases} \text{ равносильную данной. Последняя система имеет место при}$$

условии, что $xy < 0$. Тогда она примет вид $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 49. \end{cases}$ Решим полученную систему:

$$\begin{cases} xy = -6, \\ |x+y| = 5; \end{cases} \begin{cases} xy = -6, \\ x+y = 5, \\ x+y = -5; \end{cases} \begin{cases} xy = -6, \\ x+y = 5, \\ xy = -6, \\ x+y = -5; \end{cases} \begin{cases} x = 6, \\ y = -1, \\ x = -1, \\ y = 6, \\ x = -6, \\ y = 1, \\ x = 1, \\ y = -6. \end{cases}$$

Ответ: $(6; -1); (-1; 6); (-6; 1); (1; -6)$.

6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - |y-4| = 4, \\ |x-3| + |y-4| = 3. \end{cases}$

Решение.

Сложив уравнения, получим $x + |x-3| = 7$. (2)

$$x - 3: \quad \begin{array}{c} - \quad + \\ \hline 3 \end{array} \xrightarrow{\quad} x$$

$x < 3$: $x+3-x=7, 3=7$, уравнение (2) решений не имеет.

$$x \geq 3: \quad x + x - 3 = 7, \quad 2x = 10, \quad x = 5.$$

При $x = 5$ имеем $5 - |y - 4| = 4, |y - 4| = 1, y_1 = 3, y_2 = 5.$

Ответ: (5; 3); (5; 5).

7. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} |x-1| \leq 2, \\ |x-4| \geq 5. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

неравенство $|x-1| \leq 2$ равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} x-1 \leq 2, & \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -1; \end{cases} \\ x-1 \geq -2; \end{cases}$$

$$-1 \leq x \leq 3.$$

Решим второе неравенство системы:

неравенство $|x-4| \geq 5$ равносильно совокупности неравенств
$$\begin{cases} x-4 \geq 5, & \begin{cases} x \geq 9, \\ x \leq -1. \end{cases} \\ x-4 \leq -5; \end{cases}$$

Находим решение заданной системы:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 9; \end{cases} & x = -1. \end{cases}$$

Ответ: -1.

8. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} |x-3| \leq 2x-3, \\ \frac{3x-5}{x-1} < 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

неравенство $|x-3| \leq 2x-3$ равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} x-3 \leq 2x-3, \\ x-3 \geq -(2x-3); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \leq 0, \\ 3x \geq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad x \geq 2.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{3x-5}{x-1} < 2, \quad \frac{3x-5-2x+2}{x-1} < 0, \quad \frac{x-3}{x-1} < 0,$$



$$1 < x < 3.$$

Ответ: [2; 3).

Задания для самостоятельной работы дома: № 116 – № 133;
исследовательская работа: в приложении MS Excel построить графики функций $y = 2x - 2, y = 2|x| - 2, y = |2x - 2|, y = |2|x| - 2|$. Объяснить полученные результаты.

Тема 3. Графики зависимостей, содержащих модуль (3 ч)

Занятие 12 Построение графиков функций, содержащих модуль.

Цели: научить учащихся строить графики функций, содержащих модуль; закрепить изученный материал в ходе выполнения упражнений.

Содержание занятия

Анализ домашнего исследования.

1. Построение графика функции $y = f(|x|)$.

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, график функции $y = f(|x|)$ состоит из двух графиков:

$y = f(x)$ – в правой полуплоскости,

$y = f(-x)$ – в левой полуплоскости.

После того, как учащиеся познакомятся с определением четной и нечетной функции, их можно познакомить с *правилом*:

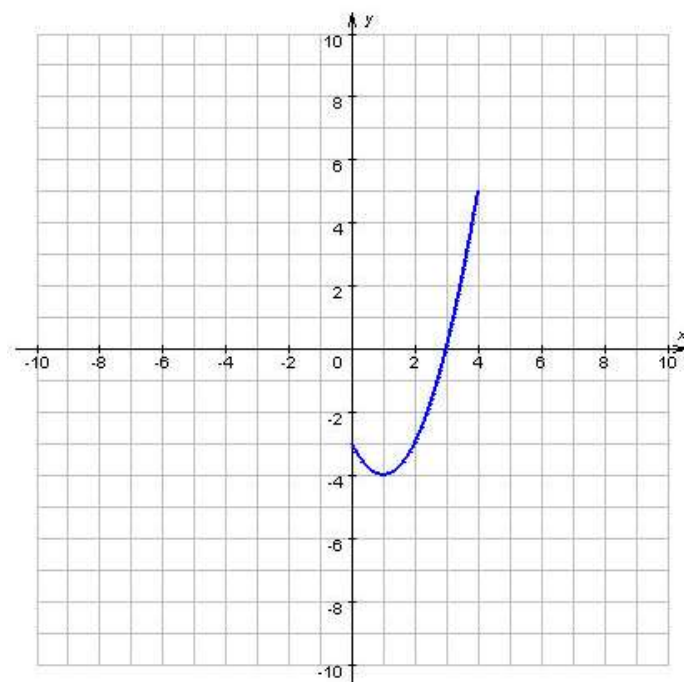
Функция $y = f(|x|)$ – четная, поэтому для построения ее графика достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех $x \geq 0$ из области определения, а затем достроить его симметрично относительно оси ординат.

Пример 1.

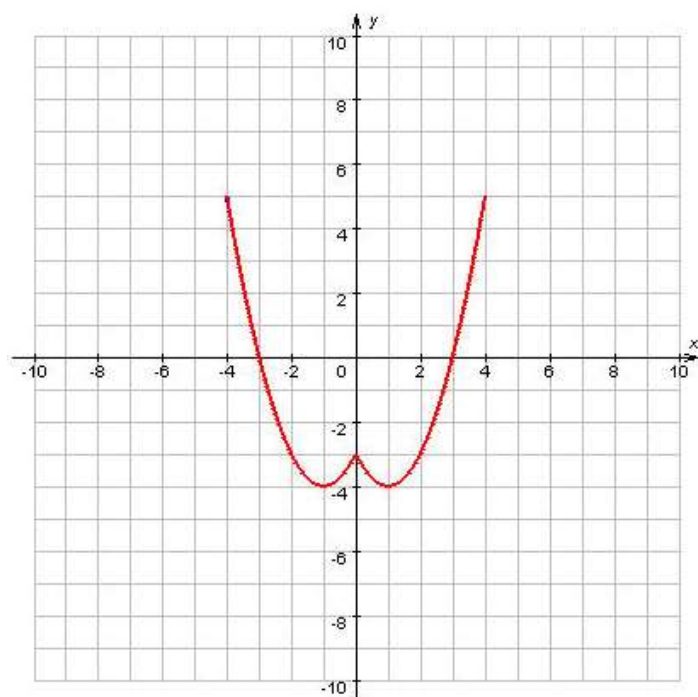
Построить график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$.

Решение.

1) Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$ для $x \geq 0$.



2) Достроим график симметрично относительно оси ординат.



2. Построение графика функции $y = |f(x)|$.

При всех значениях x , принадлежащих области определения функции, функция принимает неотрицательные значения.

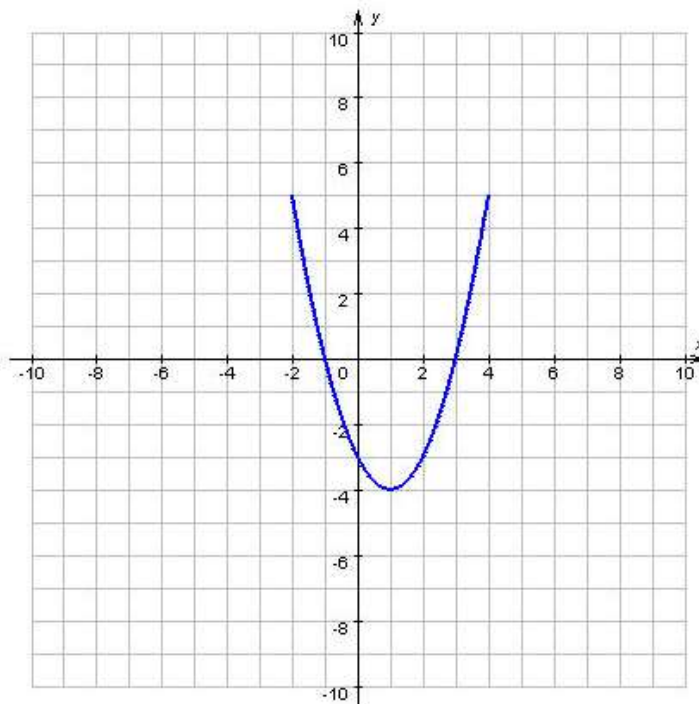
Значит, для построения графика функции $y = |f(x)|$ для всех x из области определения, надо ту часть графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс ($f(x) < 0$), отразить симметрично относительно этой оси.

Пример 2.

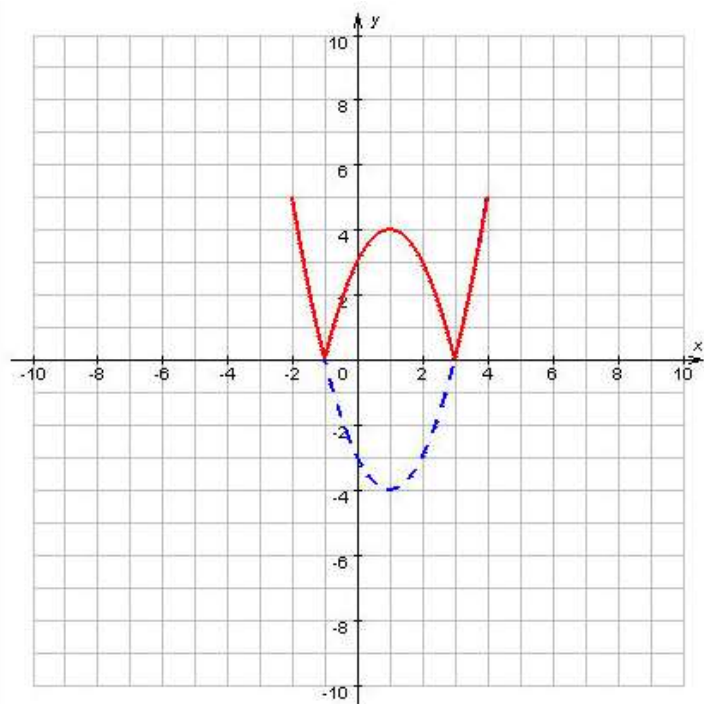
Построить график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$.

Решение.

1) Строим график функции $y = x^2 - 2x - 3$.



2) Часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, отражаем симметрично относительно этой оси.



3. Построение графика функции $y = |f(|x|)|$.

Правило: для того, чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$, надо:

а) построить график функции $y = f(x)$ для всех $x \geq 0$ из области определения функции;

б) построить график функции $y = f(-x)$ для $x < 0$ (достроить полученную в пункте а) часть графика симметрично относительно оси ординат);

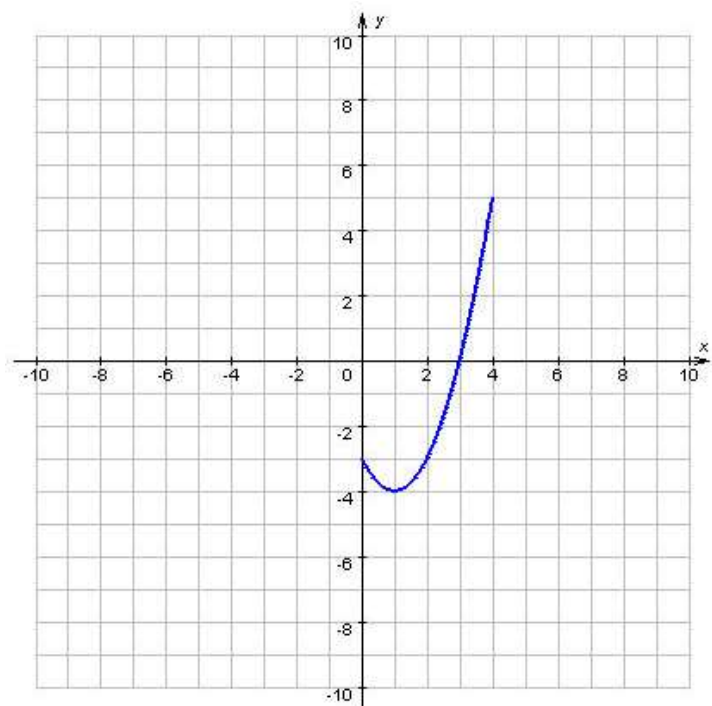
в) участки графика в нижней полуплоскости отразить на верхнюю полуплоскость симметрично относительно оси абсцисс.

Пример 3.

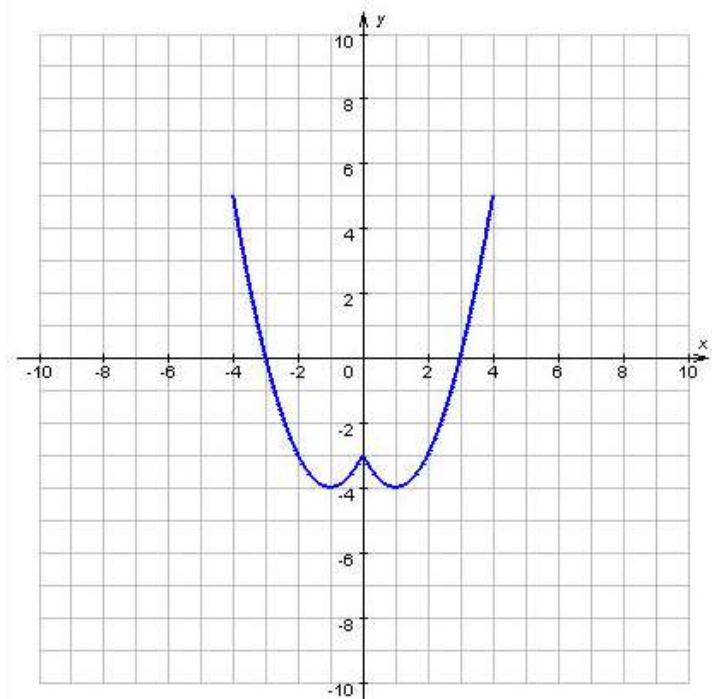
Построить график функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

Решение.

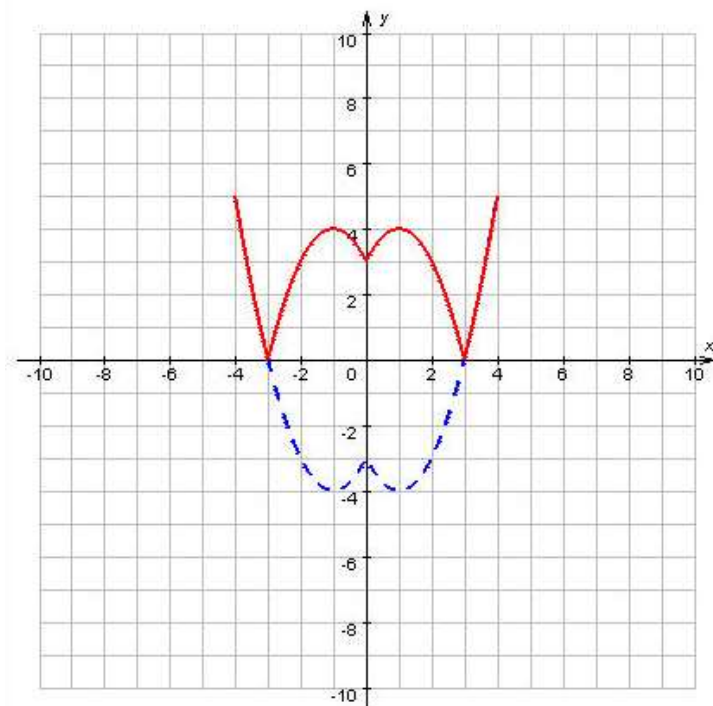
1) Строим график функции $y = x^2 - 2x - 3$ для $x \geq 0$.



2) Достроим график симметрично относительно оси ординат.



3) Часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, отражаем симметрично относительно этой оси.



4. Построение графиков вида $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)|$.

При построении графиков функций такого рода наиболее распространенным является метод, при котором знак модуля раскрывается на основании самого определения модуля.

Область определения данной функции разбивают на промежутки, в каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком промежутке функцию записывают без знака модуля и строят ее график. Объединение всех графиков составляет график исходной функции.

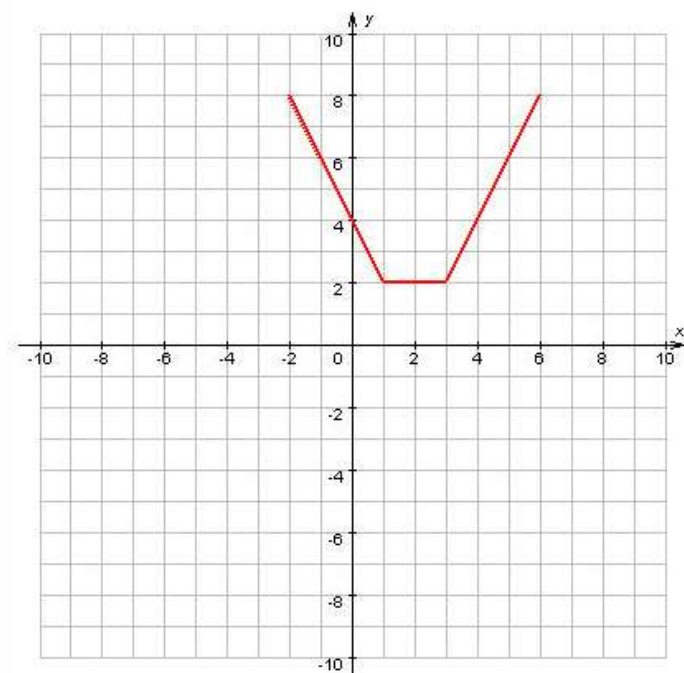
Пример 4.

Построить график функции $y = |x - 1| + |x - 3|$.

Решение.

$D(y) = R$. Точки $x = 1$ и $x = 3$ разбивают область определения функции на три промежутка: $(-\infty; 1]$, $(1; 3)$, $[3; +\infty)$.

- 1) При $x \leq 1$ имеем $y = 4 - 2x$;
- 2) При $1 < x < 3$ имеем $y = 2$;
- 3) При $x \geq 3$ имеем $y = 2x - 4$.



Построенный график – график кусочно-линейной функции – ломаная с бесконечными крайними звеньями.

Чтобы построить такую ломаную, достаточно знать все ее вершины и по одной точке на левом и правом бесконечных звеньях.

Эти соображения позволяют легко строить графики функций такого вида без раскрытия модулей, не переходя к их кусочному заданию.

Достаточно составить таблицу

| | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-----|-------|-----------|
| x | x_0 | x_1 | x_2 | ... | x_n | x_{n+1} |
| y | y_0 | y_1 | y_2 | ... | y_n | y_{n+1} |

где x_0 и x_{n+1} – произвольные значения x , такие что $x_0 < x_1$ и $x_{n+1} > x_n$, а x_1, x_2, \dots, x_n – значения, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль, y_0, y_1, \dots, y_{n+1} – соответствующие значения функции.

Все точки наносятся на координатную плоскость, последовательно соединяются отрезками, два крайних звена – лучи.

Пример 5.

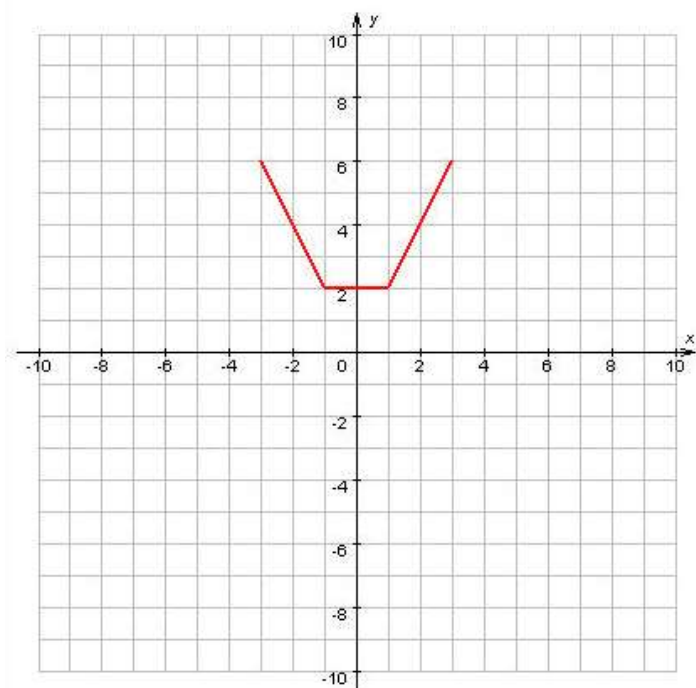
Построить график функции $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Решение.

1) Найдем значения x , при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль: $x = 1, x = -1$.

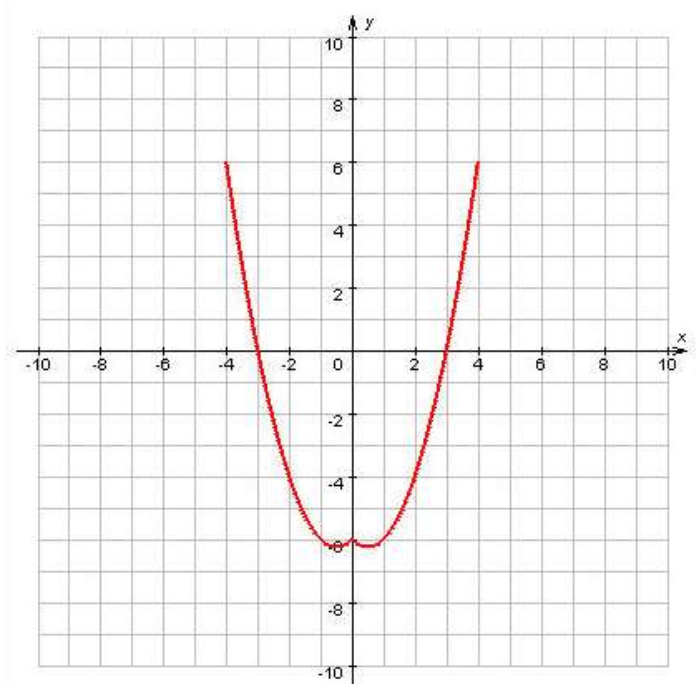
2) Составим таблицу, в которой кроме -1 и 1 запишем по одному целому числу:

| | | | | |
|---|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 1 | 2 |
| y | 4 | 2 | 2 | 4 |

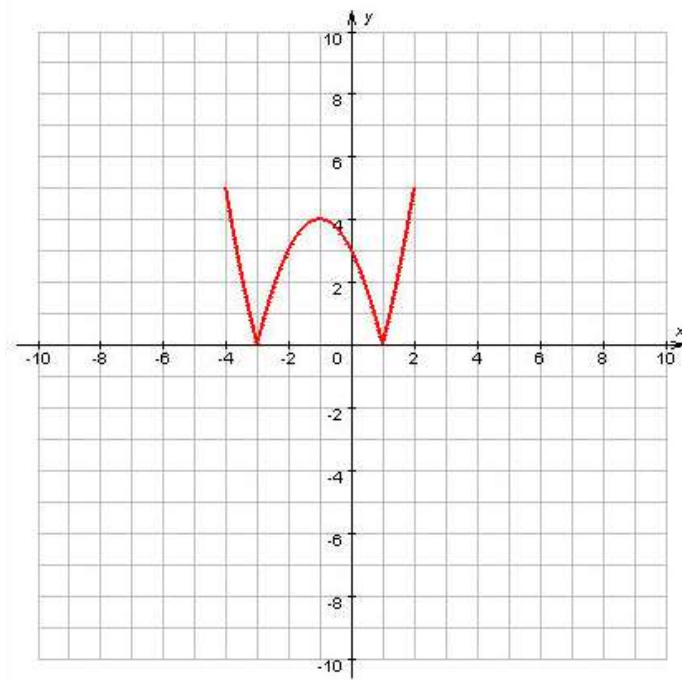


Построить и прочесть графики функций:

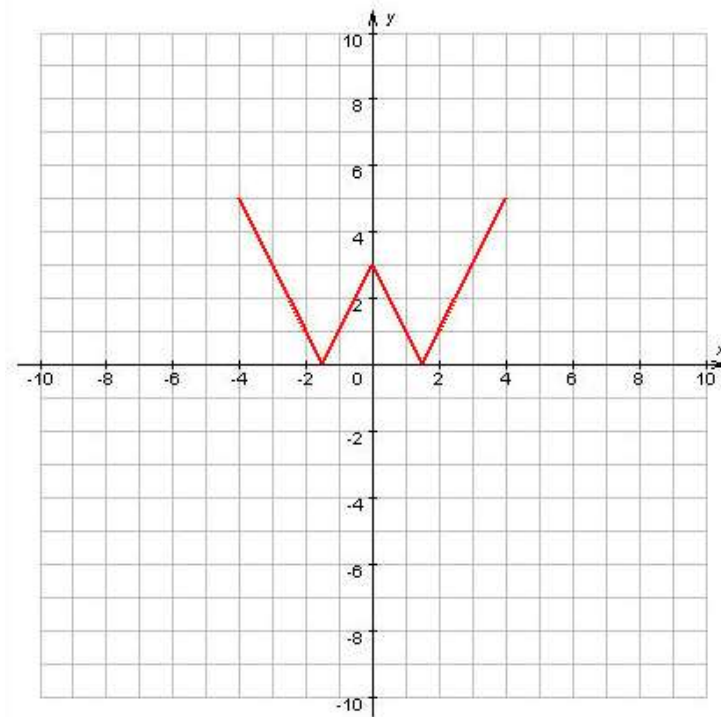
1. $y = x^2 - |x| - 6$.



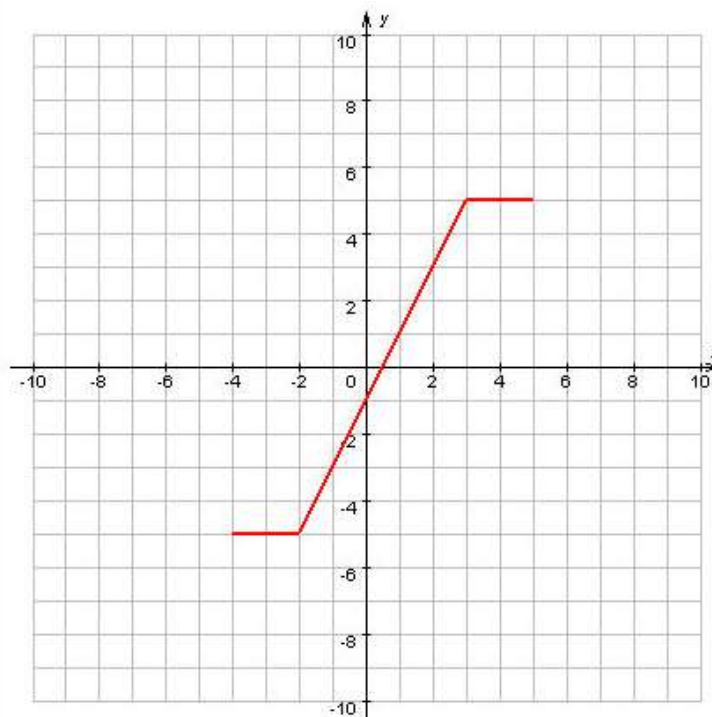
2. $y = |x^2 + 2x - 3|$.



3. $y = |2|x| - 3|$.



4. $y = |x + 2| - |x - 3|$.



Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал, № 134 – № 145.

Занятие 13

Построение графиков вида $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$.

Цели: научить учащихся строить графики зависимостей вида $|y| = f(x)$, $|y| = |f(x)|$; закрепить изученный материал в ходе выполнения упражнений.

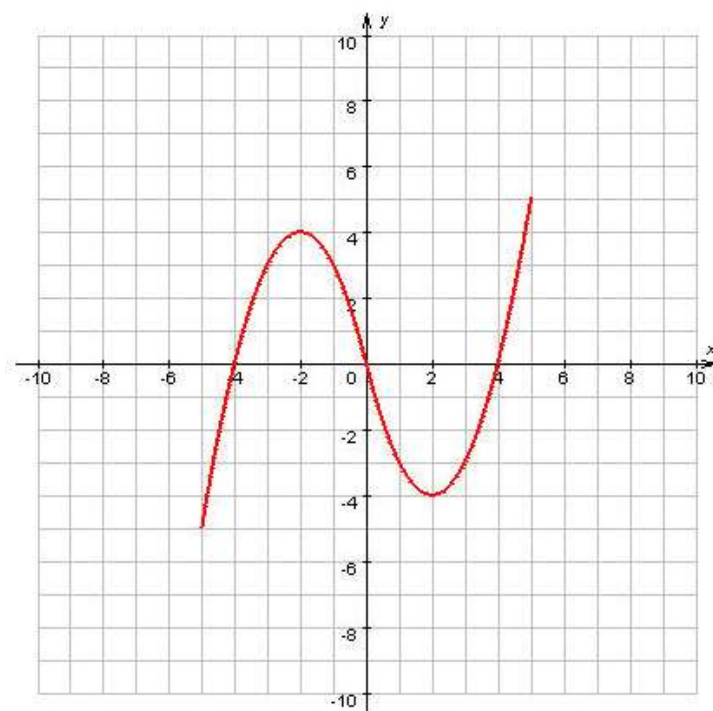
Содержание занятия

Задания для самостоятельной работы:

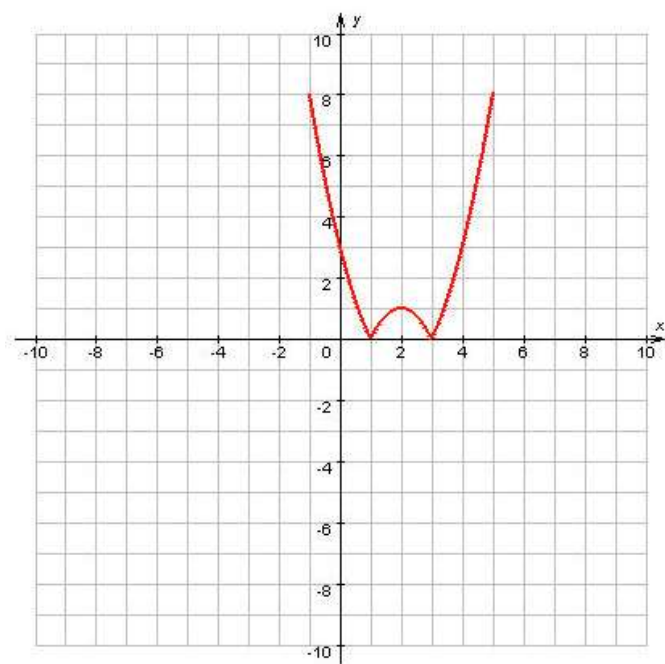
I вариант

Построить график функции:

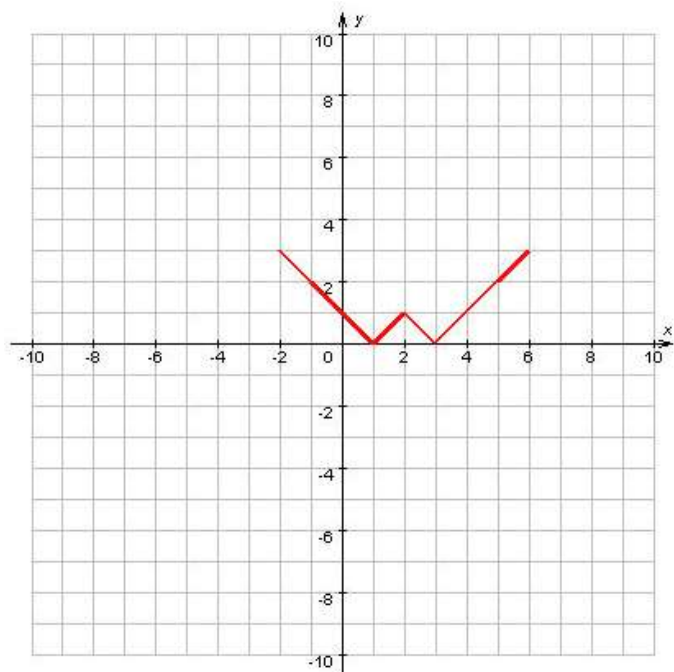
1) $y = x(|x| - 4)$.



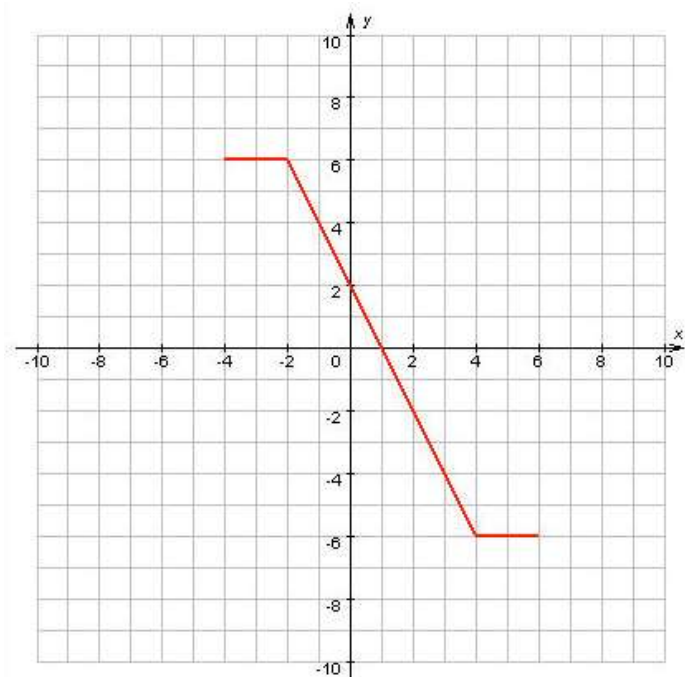
2) $y = |x^2 - 4x + 3|$.



3) $y = ||x - 2| - 1|$.



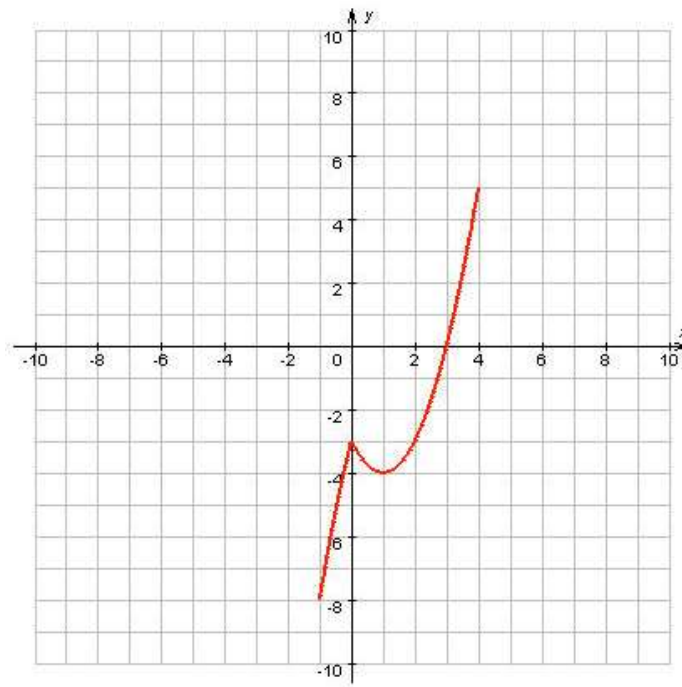
4) $y = |x - 4| - |x + 2|$.



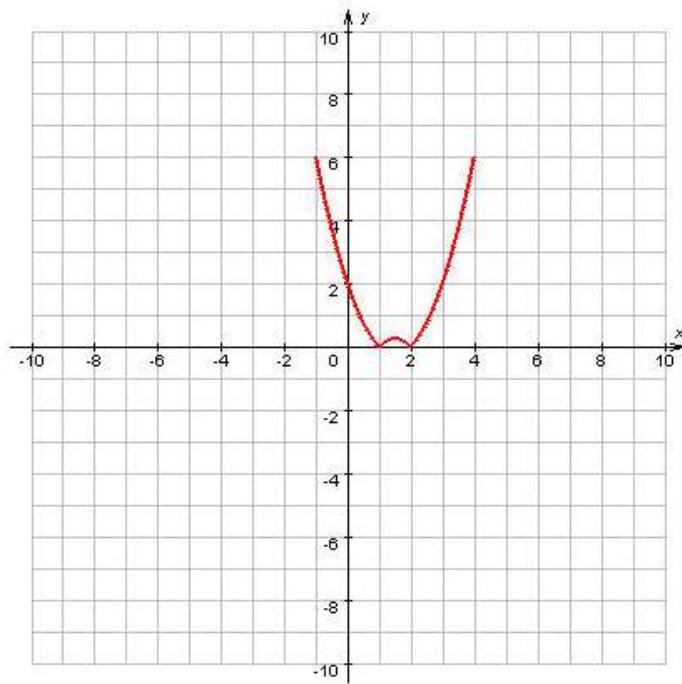
II вариант

Построить график функции:

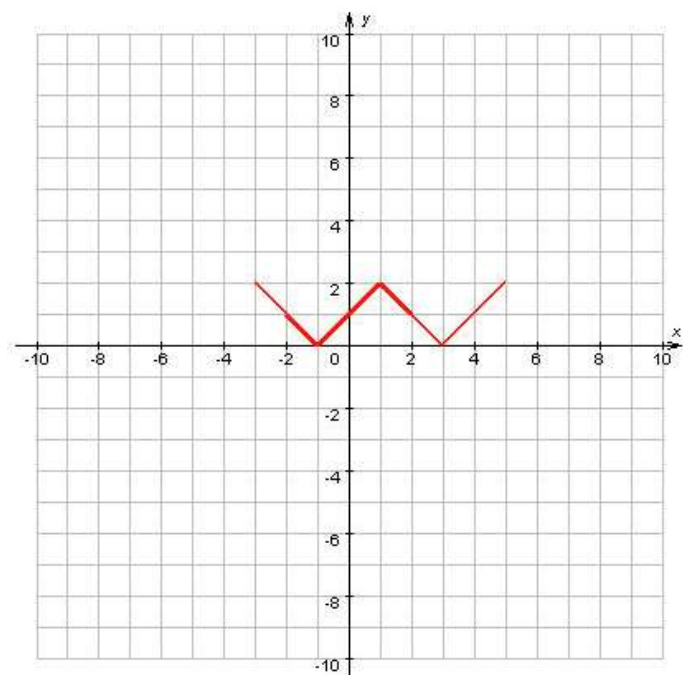
1) $y = (x - 3)(|x| + 1)$.



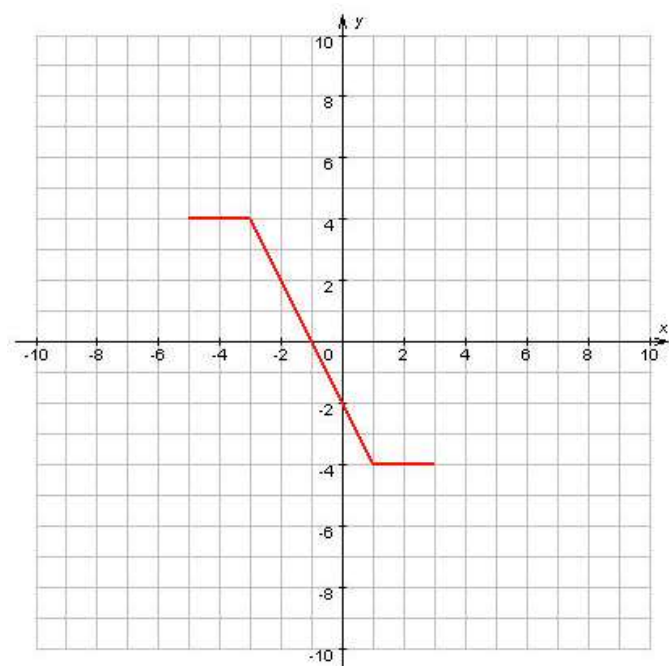
2) $y = |x^2 - 3x + 2|$.



3) $y = ||x-1|-2|$.



4) $y = |x-1| - |x+3|$.



1. Построение графика зависимости вида $|y| = f(x)$.

Эта зависимость не является функцией, так как каждому значению x из области определения может соответствовать более одного значения y .

Учитывая, что в формуле $|y| = f(x)$ $f(x) \geq 0$ и на основании определения модуля $|y| = \begin{cases} y, & \text{если } y \geq 0, \\ -y, & \text{если } y < 0, \end{cases}$

перепишем формулу $|y| = f(x)$ в виде $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$.

Исходя из этого, можно сформулировать *правило*:

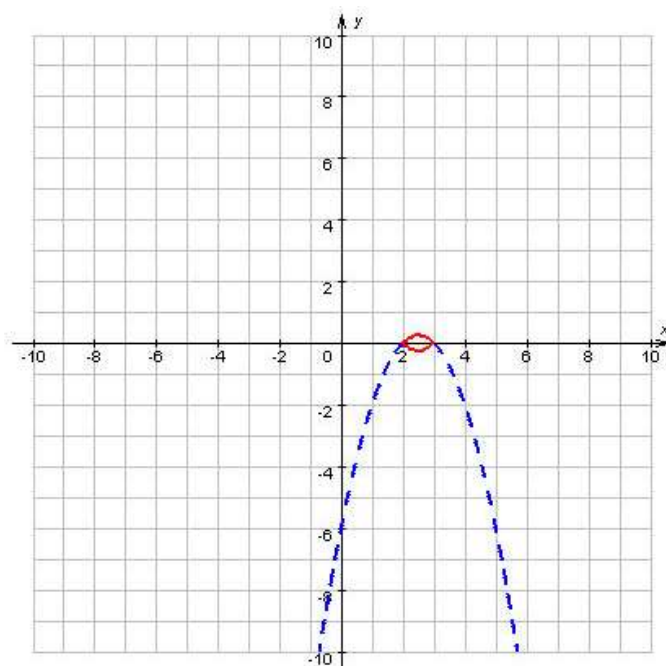
Для построения графика зависимости вида $|y| = f(x)$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для тех x из области определения, при которых $f(x) \geq 0$, и достроить полученную часть графика симметрично относительно оси абсцисс.

Пример 1.

Построить график $|y| = -x^2 + 5x - 6$.

Решение.

Строим график функции $y = -x^2 + 5x - 6$ во всей области определения, отбрасываем ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости, достраиваем оставшуюся часть симметрично относительно оси абсцисс.



2. Построение графика зависимости вида $|y| = |f(x)|$.

Порядок построения:

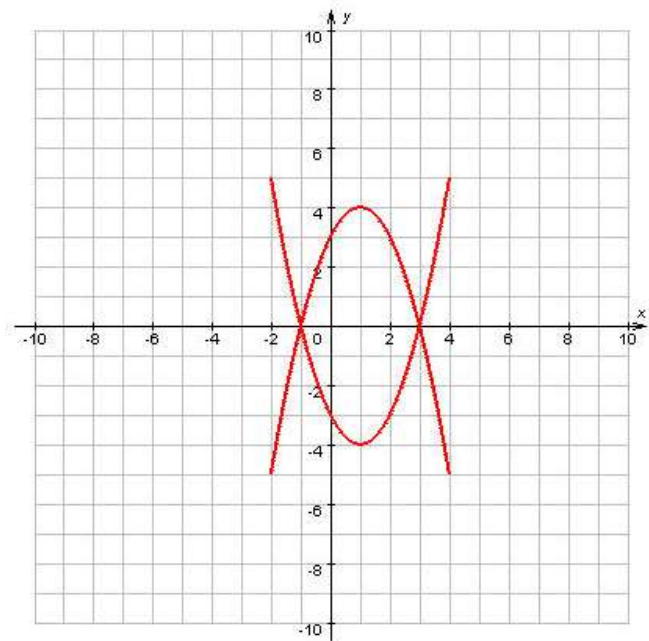
- 1) Строим график функции $y = f(x)$.
- 2) Строим график функции $y = -f(x)$ (достроим график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси абсцисс).

Пример 2.

Построить график $|y| = |x^2 - 2x - 3|$.

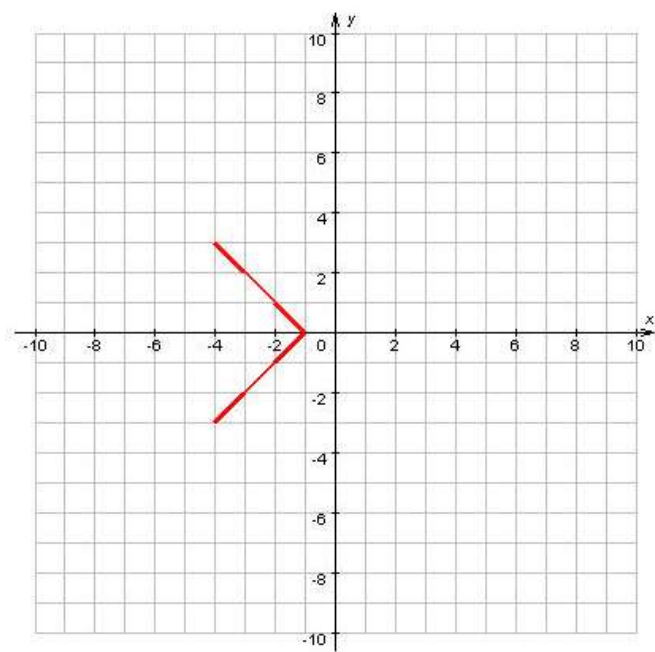
Решение.

- 1) Строим график функции $y = x^2 - 2x - 3$.
- 2) Строим график функции $y = -x^2 + 2x + 3$.

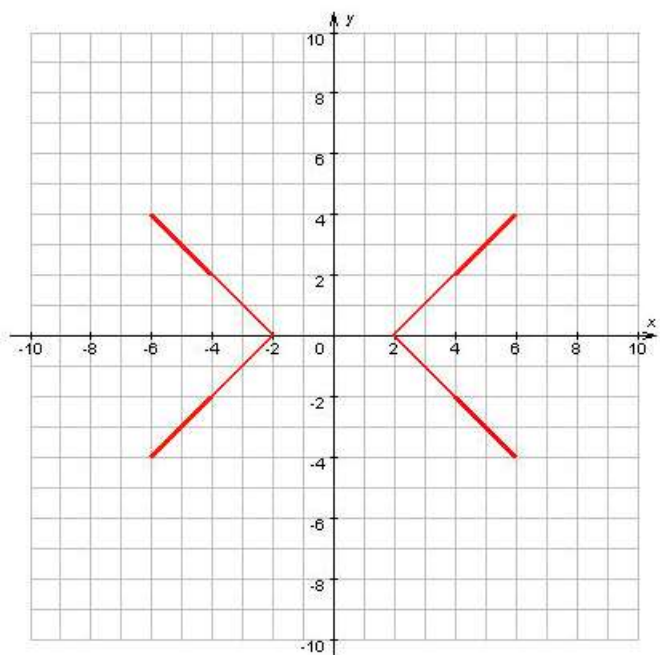


Построить графики:

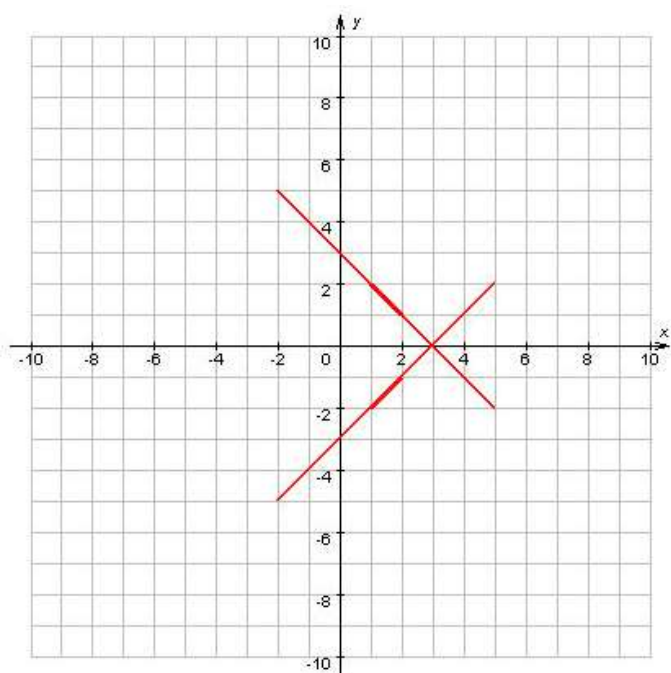
1. $|y| = -1 - x$.



2. $|y| = |x| - 2$.



3. $|y| = |x - 3|$.



Задания для самостоятельной работы дома: теоретический материал,
№ 146 – № 153.

Занятие 14
Решение уравнений и неравенств графическим способом.
Задание фигур на координатной плоскости
уравнениями и неравенствами.

Цели: рассмотреть графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих модуль; закрепить изученный материал в ходе выполнения упражнений.

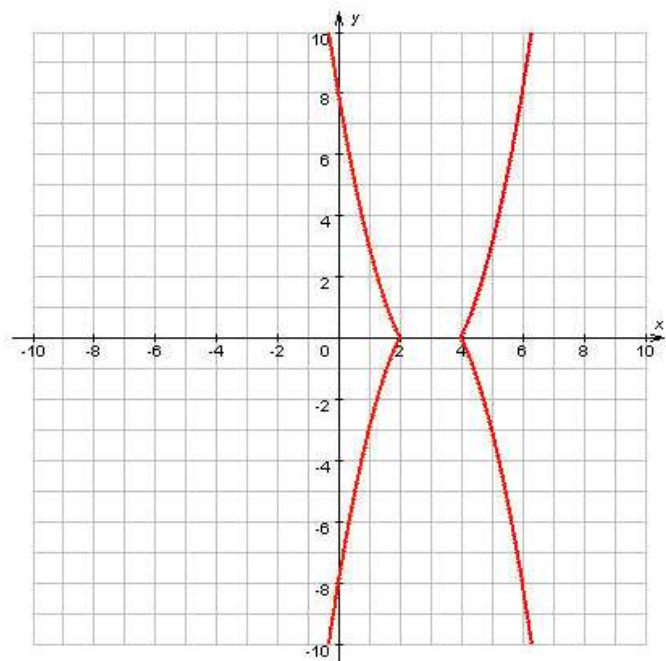
Содержание занятия

Задания для самостоятельной работы:

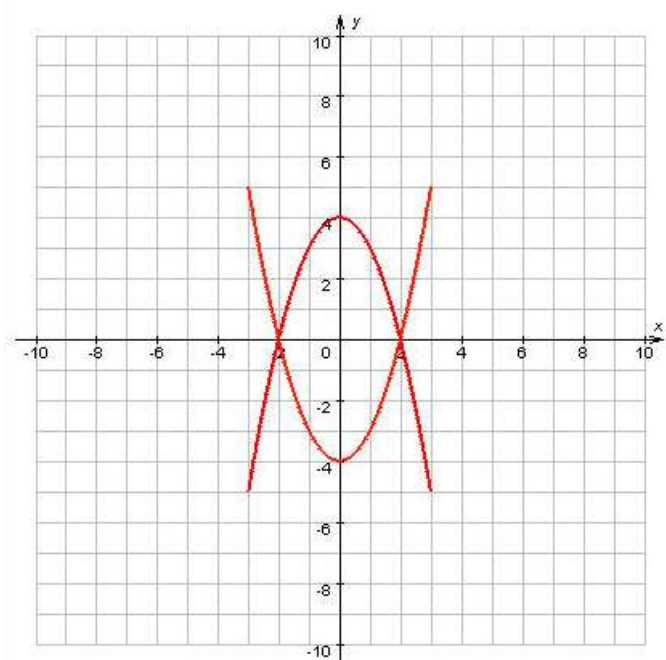
I вариант

Построить график:

1) $|y| = x^2 - 6x + 8$.



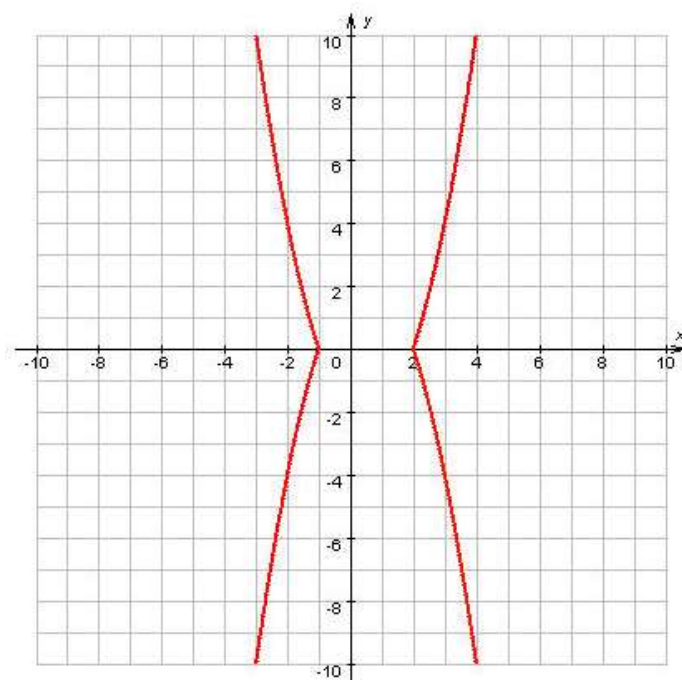
2) $|y| = |x^2 - 4|$.



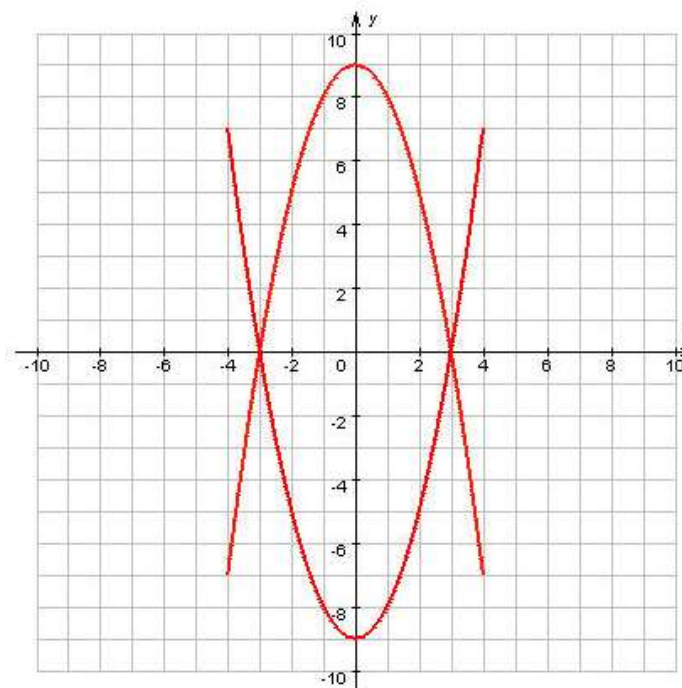
II вариант

Построить график:

1) $|y| = x^2 - x - 2$.



2) $|y| = |9 - x^2|$.

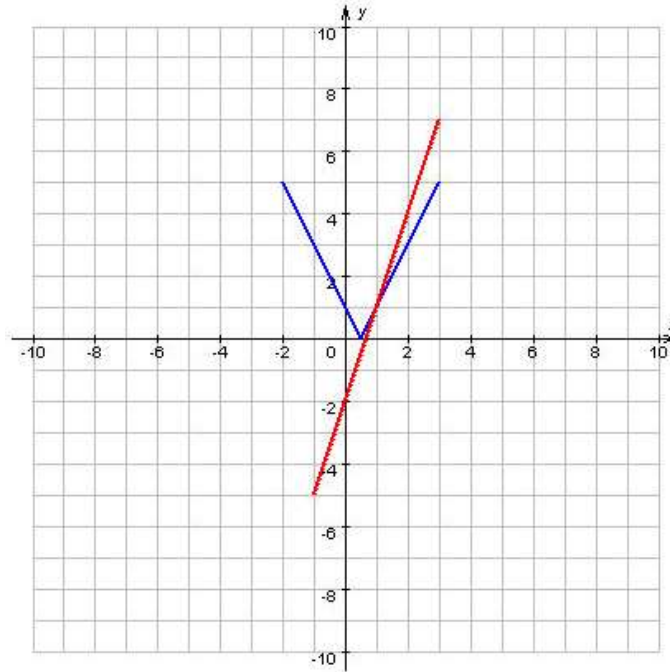


1. Решить уравнение $|2x - 1| - 3x + 2 = 0$.

Решение.

Решим уравнение графически. Представим уравнение в виде $|2x-1|=3x-2$.

Построим в одной системе координат графики функций $y=|2x-1|$ и $y=3x-2$. Они имеют одну точку пересечения – (1; 1). Значит, исходное уравнение имеет один корень $x=1$.

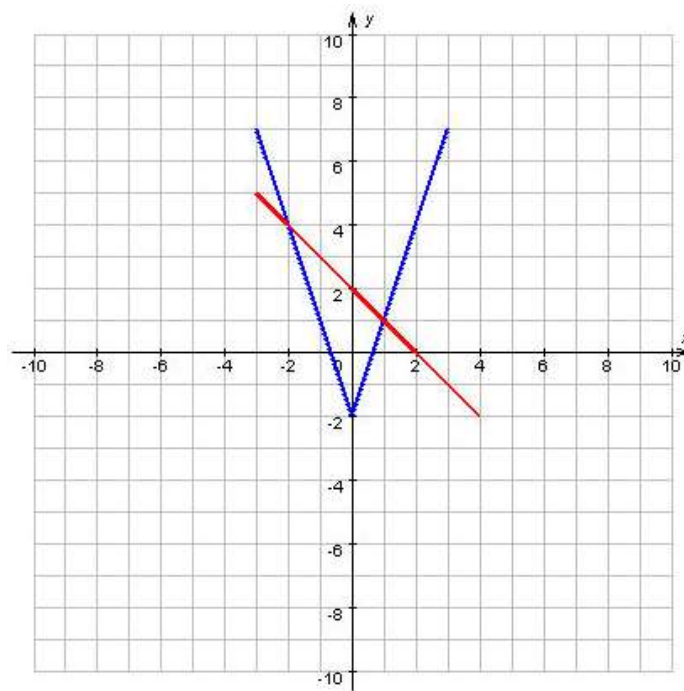


Ответ: 1.

2. Решить неравенство $3|x|-2 < 2-x$.

Решение.

Построим графики функций $y=3|x|-2$ и $y=2-x$ в одной системе координат. Найдем, при каких значениях x график функции $y=3|x|-2$ расположен ниже графика функции $y=2-x$. Решением данного неравенства является промежуток $(-2; 1)$.



Ответ: $(-2; 1)$.

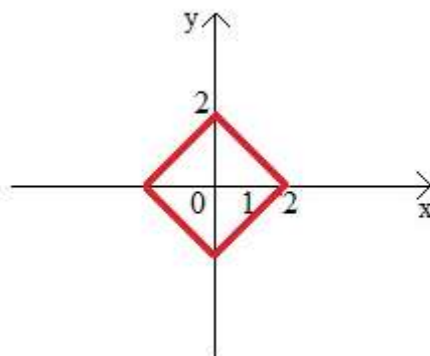
3. Изобразите на координатной плоскости заданное множество:

1) $|x| + |y| = 2$.

Решение.

Построим график функции $y = 2 - |x|$ при $y \geq 0$ и достроим его до графика $|y| = 2 - |x|$.

График $|x| + |y| = 2$ – квадрат с вершинами в точках $(2; 0)$, $(0; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$.



2) $|x| + |y| \leq 2$.

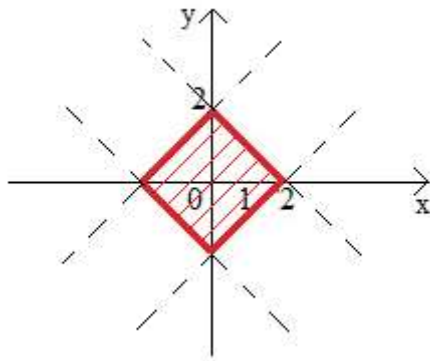
Решение.

I четверть: $x > 0, y > 0, x + y \leq 2, y \leq 2 - x$.

II четверть: $x < 0, y > 0, -x + y \leq 2, y \leq 2 + x$.

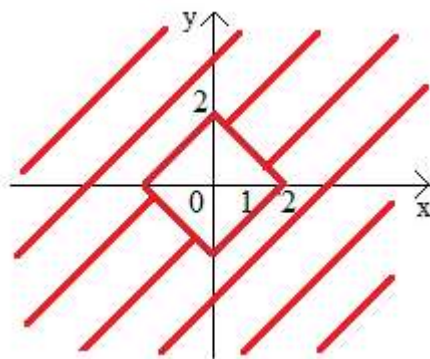
III четверть: $x < 0, y < 0, -x - y \leq 2, y \geq -x - 2$.

IV четверть: $x > 0, y < 0, x - y \leq 2, y \geq x - 2$.



3) $|x| + |y| \geq 2$.

Решение.



4) $|x| + x = |y| + y$.

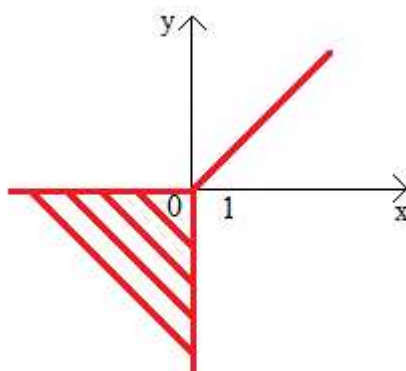
Решение.

I четверть: $x + x = y + x, 2x = 2y, x = y$.

II четверть: $-x + x = y + y, 2y = 0, y = 0$.

III четверть: $-x + x = -y + y, 0 \cdot x = 0 \cdot y$, все точки III четверти удовлетворяют данному равенству.

IV четверть: $x + x = -y + y, 2x = 0, x = 0$.



Задания для самостоятельной работы дома: № 154 – № 160.

Тема 4. Модуль в заданиях единого государственного экзамена (1 ч)

Занятие 15

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов экзаменационных заданий, содержащих модуль.

На занятии 14 класс был разбит на четыре группы. К занятию 15 каждая группа работала по определенной теме:

1. Уравнения, неравенства, графики, содержащие модуль, группы «А» ЕГЭ.
2. Уравнения, содержащие модуль, группы «В» и «С» ЕГЭ.
3. Неравенства, содержащие модуль, группы «В» и «С» ЕГЭ.
4. Уравнения и неравенства, содержащие модуль и параметр.

Содержание занятия

I. Сообщения учащихся первой группы.

На доске записаны задания группы «А» ЕГЭ. Учащиеся первой группы поясняют каждое задание, записанное на доске.

1. Какому промежутку принадлежит сумма корней уравнения $|x - 5| = 10$?

- 1) $(10; +\infty)$;
- 2) $[10; 30]$;
- 3) $(-\infty; -10)$;
- 4) $[-10; 10)$.

Ответ: 2.

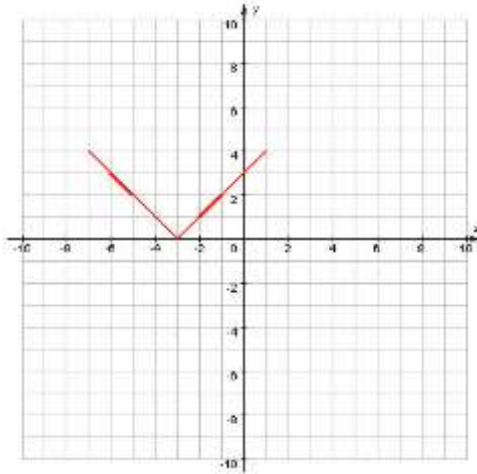
2. Найдите сумму целых решений неравенства $|x + 4| \leq 2$.

- 1) 20;
- 2) -12;
- 3) 12;
- 4) -20.

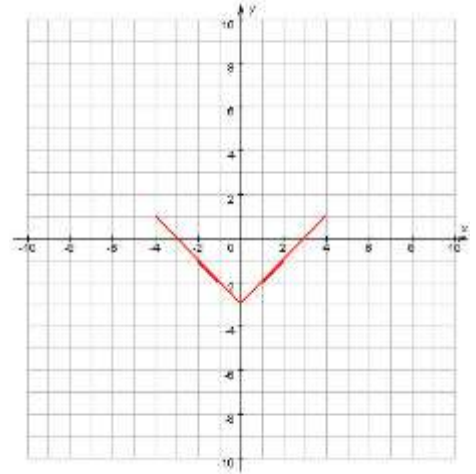
Ответ: 4.

3. На каком рисунке изображен график функции $y = |x - 3|$?

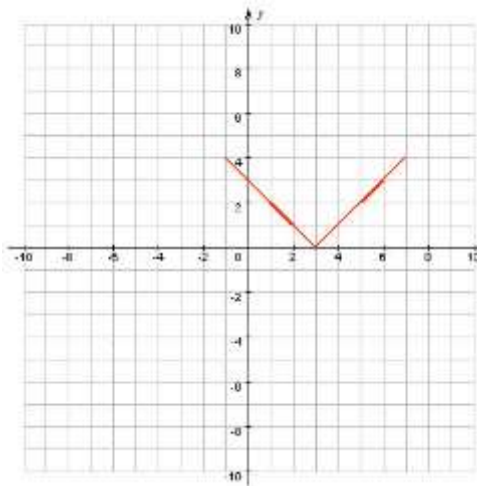
1)



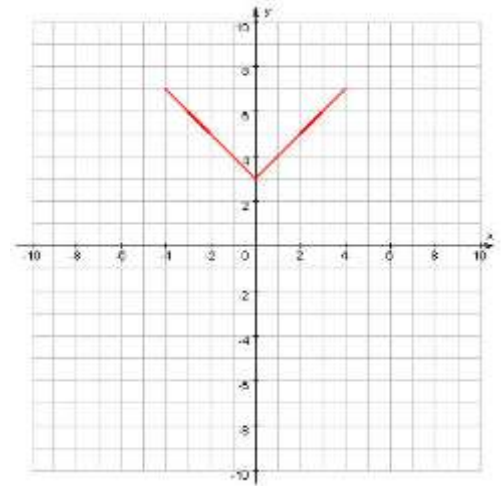
2)



3)



4)



Ответ: 3.

II. Сообщения учащихся второй группы.

Выступает учащийся второй группы. На доске записан пример и его решение, по записи на доске ученик поясняет решение, полученное дома.

Пример 1.

Решить уравнение $|x^2 - 5x - 6| + |2x^2 - 5x + 3| = |3x^2 - 10x - 3|$.

Решение.

I способ.

$$x^2 - 5x - 6 = 0, x_1 = -1, x_2 = 6;$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1,5;$$

$$3x^2 - 10x - 3 = 0, x_5 = \frac{5 - \sqrt{34}}{3}, x_6 = \frac{5 + \sqrt{34}}{3}.$$

$$x^2 - 5x - 6: \quad \begin{array}{cccccccc} + & & - & & - & & - & & - & & + \\ \hline & & -1 & & \frac{5-\sqrt{34}}{3} & & 1 & & 1,5 & & \frac{5+\sqrt{34}}{3} & & 6 \\ & & & & & & & & & & & & x \end{array}$$

$$2x^2 - 5x + 3: \quad \begin{array}{cccccccc} + & & + & & + & & - & & + & & + & & + \\ \hline & & -1 & & \frac{5-\sqrt{34}}{3} & & 1 & & 1,5 & & \frac{5+\sqrt{34}}{3} & & 6 \\ & & & & & & & & & & & & x \end{array}$$

$$3x^2 - 10x - 3: \quad \begin{array}{cccccccc} + & & + & & - & & - & & - & & + & & + \\ \hline & & -1 & & \frac{5-\sqrt{34}}{3} & & 1 & & 1,5 & & \frac{5+\sqrt{34}}{3} & & 6 \\ & & & & & & & & & & & & x \end{array}$$

1) $x < -1, x > 6:$

$$x^2 - 5x - 6 + 2x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - 10x - 3, -3 = -3.$$

Решением исходного уравнения являются все числа из промежутков $(-\infty; -1), (6; +\infty)$.

2) $-1 \leq x \leq \frac{5-\sqrt{34}}{3}, \frac{5+\sqrt{34}}{3} \leq x \leq 6:$

$$-x^2 + 5x + 6 + 2x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - 10x - 3, -2x^2 + 10x + 12 = 0, x^2 - 5x - 6 = 0, x_1 = 6, x_2 = -1.$$

Решением исходного уравнения являются числа $-1, 6$.

3) $\frac{5-\sqrt{34}}{3} < x < 1, 1,5 < x < \frac{5+\sqrt{34}}{3}:$

$$-x^2 + 5x + 6 + 2x^2 - 5x + 3 = -3x^2 + 10x + 3, 4x^2 - 10x + 6 = 0, 2x^2 - 5x + 3 = 0, x_3 = 1,5, x_4 = 1.$$

Исходное уравнение не имеет корней на данных промежутках.

4) $1 \leq x \leq 1,5:$

$$-x^2 + 5x + 6 - 2x^2 + 5x - 3 = -3x^2 + 10x + 3, 3 = 3.$$

Решением исходного уравнения являются все числа из промежутка $[1; 1,5]$.

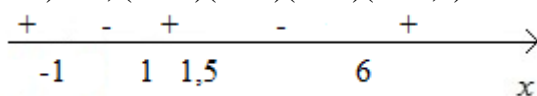
Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 1,5] \cup [6; +\infty)$.

II способ.

Заметим, что $(x^2 - 5x - 6) + (2x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 10x - 3$.

Воспользуемся следующим свойством модуля: $|a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

Значит, исходное уравнение равносильно неравенству
 $(x^2 - 5x - 6)(2x^2 - 5x + 3) \geq 0, (x - 6)(x + 1)(x - 1)(x - 1,5) \geq 0.$



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 1,5] \cup [6; +\infty).$

III. Сообщения учащихся третьей группы.

Выступает учащийся третьей группы. На доске записан пример и его решение, по записи на доске ученик поясняет решение, полученное дома.

Пример 2.

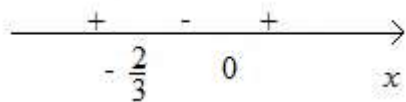
Решить неравенство $|x^3 - 3x - 2| - |3x + 2| < |x^3|.$

Решение.

Заметим, что $(x^3 - 3x - 2) + (3x + 2) = x^3.$

Воспользуемся следующим свойством модуля: $|a| - |b| < |a + b| \Leftrightarrow b(a + b) > 0.$

Значит, исходное неравенство равносильно неравенству $(3x + 2)x^3 > 0.$



Ответ: $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (0; +\infty).$

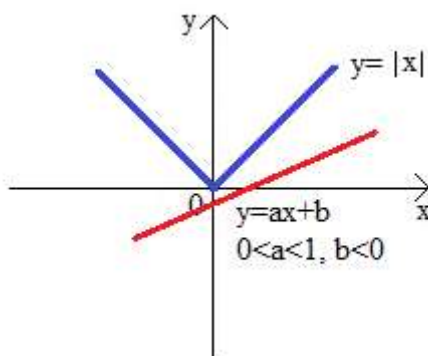
IV. Сообщения учащихся четвертой группы.

Пример 3.

Найти все такие a , что при любом b уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

Решение.

Наиболее рациональный подход к решению этой задачи – геометрический. Рассмотрим графики функций $y = |x|$ и $y = ax + b.$



а) Если $b < 0$ и $|a| \leq 1$, то графики не пересекаются, а это значит, что исходное уравнение не имеет решений.

б) Если $b \geq 0$ и $|a| \leq 1$, то хотя графики и пересекаются, это происходит не при любом значении b , а только при $b \geq 0$.

в) Если $|a| > 1$, то графики пересекаются при любом значении b .

Ответ: $|a| > 1$.

Пример 4.

При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 4|x - a| \geq a^2$ справедливо для всех значений x ?

Решение.

1) Если $x \geq a$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 4(x - a) \geq a^2$, $(x^2 - a^2) + 4(x - a) \geq 0$, $(x - a)(x + a) + 4(x - a) \geq 0$, $(x - a)(x + a + 4) \geq 0$, $(x - a)(x - (-a - 4)) \geq 0$,

которое справедливо для всех рассматриваемых значений x при $a \geq -a - 4$, то есть при $a \geq -2$.

2) Если $x < a$, то приходим к неравенству $(x - a)(x - (4 - a)) \geq 0$, которое справедливо для всех рассматриваемых значений x при $a \leq 4 - a$, то есть при $a \leq 2$.

Ответ: $a \in [-2; 2]$.

Тема 5. Итоговое занятие (2ч)

Занятие 16, 17

Цели: выяснить степень усвоения учащимися программы курса.

Содержание занятия

I. Проверочная работа.

Вариант I

1. Решите уравнение:

а) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;

б) $|3x^2 + 7x - 3| = 3x^2 + 3x - 1$;

в) $|x + 4| - |x - 3| = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $||x - 3| - 2| \leq 1$;

б) $||2x - 1| - 2| > 3$;

в) $|x-1|+|x-2|<3x-9$.

3. Упростите выражение

$$\frac{(x+2)\cdot\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-2|+|y-5|=1, \\ y-|x-2|=5. \end{cases}$$

5. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; $y = |x^2 - 4x + 3|$; $y = |x^2 - 4|x| + 3|$;

б) $y = |x-1| + |x-2|$.

Вариант II

1. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$;

б) $|3x^2 + x - 7| = 3x^2 - 3x - 1$;

в) $|x-1| + |x-2| = 1$.

2. Решите неравенство:

а) $||x-4|-2| < 3$;

б) $||3x-4|-5| > 1$;

в) $|x-2| + |x-3| < 6 - 3x$.

3. Упростите выражение

$$\frac{(x-1)\cdot\sqrt{(x-1)^2+4x}}{x^2+1+2|x|}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-2|+2|y-1|=2, \\ x+|y-1|=3,5. \end{cases}$$

5. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 4|x| - 5$; $y = |x^2 + 4x - 5|$; $y = |x^2 + 4|x| - 5|$;

б) $y = |x-2| + |x+2|$.

II. Защита творческих работ.

Дидактический материал для учащихся

Упражнения

Упростите выражение:

№ 1.

$$\frac{a^2 - 4}{|a + 2|}.$$

№ 2.

$$\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{|x| \cdot (x - 2)}.$$

№ 3.

$$\frac{a^2 + 4}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2 - 4}{2a}\right)^2 + 4}}.$$

№ 4.

$$\frac{a^2 - 3}{\sqrt{\left(\frac{a^2 + 3}{2a}\right)^2 - 3}}.$$

№ 5.

$$\frac{m}{m^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{m^2 - 1}{2m}\right)^2}.$$

№ 6.

$$\frac{a}{a - 2b} \cdot \sqrt{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{a}}.$$

№ 7.

$$\frac{\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}} + \frac{2a}{a + b}, \quad 0 < a < b.$$

№ 8.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{1 - 2\sqrt{a} + a}}.$$

№ 9.

$$\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{3 - x} + \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}.$$

Вычислите:

№ 10.

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}}.$$

№ 11.

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}}.$$

№ 12.

$$\sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}}.$$

Докажите, что данное выражение – целое число:

№ 13.

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}.$$

№ 14.

$$\sqrt{3} - \sqrt{12+6\sqrt{3}}.$$

Решите уравнение:

№ 15.

$$x^2 - 5|x| = 0.$$

№ 16.

$$3x^2 + 4|x| = 0.$$

№ 17.

$$x^2 - |x| - 2 = 0.$$

№ 18.

$$x^2 + 5|x| + 4 = 0.$$

№ 19.

$$2x^2 + |x| - 3x = 0.$$

№ 20.

$$4x^2 - 3|x| + x = 0.$$

№ 21.

$$4x^2 + \frac{x}{|x|} = 0.$$

№ 22.

$$x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0.$$

№ 23.

$$|x-2| = x-2.$$

№ 24.

$$|2x-4| = 10-5x.$$

№ 25.

$$|x-3| = 4.$$

№ 26.

$$|x-2| = 5.$$

№ 27.

$$|x + 4| + 1 = 0.$$

№ 28.

$$|3x + 2| - 4 = 0.$$

№ 29.

$$\left| \frac{3 - x}{x - 1} \right| = 1.$$

№ 30.

$$|5 - 3x| = 2x + 1.$$

№ 31.

$$|3x - 7| = x^2 - 7.$$

№ 32.

$$|x^2 + 5| = 6x.$$

№ 33.

$$|x^2 + 2x + 3| = 3x + 45.$$

№ 34.

$$|x^2 - x - 3| = -x - 1.$$

№ 35.

$$|x - 7| = |x + 9|.$$

№ 36.

$$|3x - 5| = |5 - 2x|.$$

№ 37.

$$|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|.$$

№ 38.

$$|3x^2 - 6x - 1| = 2|3 - x|.$$

№ 39.

$$x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0.$$

№ 40.

$$x^2 + 4x + |x + 3| + 3 = 0.$$

№ 41.

$$|x| - |x - 2| = 2.$$

№ 42.

$$|x + 4| - |x - 4| = 8.$$

№ 43.

$$|x - 4| + |x + 4| = 8.$$

№ 44.

$$|7x - 12| - |7x - 11| = 1.$$

№ 45.

$$|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0.$$

№ 46.

$$|x-3|+|x+2|-|x-4|=3.$$

№ 47.

$$\frac{|x|-4}{|x-3|-1}=1.$$

№ 48.

$$\frac{|x+2|-3}{|x|-1}=3.$$

№ 49.

$$||x-1|+2|=1.$$

№ 50.

$$|x|x-1|-2x|=x^2-2.$$

№ 51.

$$\left| \frac{|x-2|}{1-|x-2|} \right| = 3.$$

Решите неравенство:

№ 52.

$$x^2-5|x|+6 < 0.$$

№ 53.

$$x^2-|x|-12 \geq 0.$$

№ 54.

$$8x^2+|-x|+1 > 0.$$

№ 55.

$$x^2+2|x|-3 \leq 0.$$

№ 56.

$$x^2+5|x|-24 > 0.$$

№ 57.

$$7|x|-x^2-12 \leq 0.$$

№ 58.

$$11|x|+20-3x^2 > 0.$$

№ 59.

$$\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geq -3x.$$

№ 60.

$$|x-3| < -2.$$

№ 61.

$$|x-4| \leq 0.$$

№ 62.

$$|x-5| < 0.$$

№ 63.

$$|2x+1| \leq -3.$$

№ 64.

$$|3x+1| > 2.$$

№ 65.

$$|x-3| > -1.$$

№ 66.

$$|x-5| \geq 0.$$

№ 67.

$$|2x-10| > 0.$$

№ 68.

$$|3x-5| \geq -2.$$

№ 69.

$$|x-1| < 2x-4.$$

№ 70.

$$|x-3| < 6-3x.$$

№ 71.

$$|x-4| > 2x-1.$$

№ 72.

$$|2x+5| < x+4.$$

№ 73.

$$|x^2+2x| \geq 3.$$

№ 74.

$$|x^2+3x| \leq 4.$$

№ 75.

$$|2x^2+5x-4| < 3.$$

№ 76.

$$|3x^2-4x-2| > 2.$$

№ 77.

$$|6x^2-2x+1| \leq 1.$$

№ 78.

$$|x^2-3x-15| < 2x^2-x.$$

№ 79.

$$|x^2+x+10| \leq 3x^2+7x+2.$$

№ 80.

$$|2x^2+x+11| \geq x^2-5x+6.$$

№ 81.

$$|4x^2 - 9x + 6| > -x^2 + x - 3.$$

№ 82.

$$|1 - x^2| \geq (1 + x)^2.$$

№ 83.

$$|x^2 - 1| \geq x^2 + 1.$$

№ 84.

$$|x - 2x^2| > 2x^2 - x.$$

№ 85.

$$|x^2 + 6x + 8| \leq -x^2 - 6x - 8.$$

№ 86.

$$|x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20.$$

№ 87.

$$\left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| \leq 4.$$

№ 88.

$$\left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} \right| > 1.$$

№ 89.

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| > 1.$$

№ 90.

$$\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| \leq 3.$$

№ 91.

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \geq 1.$$

№ 92.

$$||2x + 1| - 5| > 2.$$

№ 93.

$$||x - 3| + 1| \geq 2.$$

№ 94.

$$||x - 1| + x| < 3.$$

№ 95.

$$||x - 2| - x + 3| < 5.$$

№ 96.

$$||3x + 1| + x + 1| \geq 2.$$

№ 97.

$$|x^2 - |x^2 + x|| > 11.$$

№ 98.

$$\left| |2x^2 - x| - 3 \right| \leq 2x^2 + x + 5.$$

№ 99.

$$|x + 2| - |x - 3| \geq 2x - 1.$$

№ 100.

$$|x - 1| + |x - 3| < x + 1.$$

№ 101.

$$|2 - 5x| + |x + 1| \geq x + 3.$$

№ 102.

$$|3x - 1| + |4x + 3| \leq 3\frac{1}{4}.$$

№ 103.

$$|5x + 1| + |2 - 3x| > 2\frac{3}{5}.$$

№ 104.

$$|x^2 - 3x + 4| \geq |x - 1 - x^2|.$$

№ 105.

$$|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| > 4.$$

№ 106.

$$|5x - 1| - |4x + 2| \leq |x - 3|.$$

№ 107.

$$|x + 2| + |x + 1| + |x - 4| \geq 9.$$

№ 108.

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| \leq 4.$$

№ 109.

$$|x - 1| \leq |2x - 3| - |x - 2|.$$

№ 110.

$$|x - 1| - |x| + |2x + 3| > 2x + 4.$$

№ 111.

$$|x - 1| - |x + 2| + 3 \geq |2x - 5| - |3 - x|.$$

№ 112.

$$\left| \frac{1}{x + 2} \right| < \left| \frac{2}{x - 1} \right|.$$

№ 113.

$$\frac{|x + 1|}{|x - 2| - 2} < 1.$$

№ 114.

$$\frac{x^2 - |2x - 3|}{x^2 - |2 - x|} \leq 1.$$

№ 115.

$$|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|.$$

Решите уравнение:

№ 116.

$$|x - 2|x^2 = 10 - 5x.$$

№ 117.

$$(7x^2 - 3x - 4)^2 + |7x + 4|(x^2 - 1)^2 = 0.$$

№ 118.

$$6x - 9 = x^2(|x - 3| + 1).$$

№ 119.

$$(x - 2)^2 - 8|x - 2| + 15 = 0.$$

№ 120.

$$(x + 3)^2 - |x + 3| - 30 = 0.$$

№ 121.

$$|2 - |1 - |x|| = 1.$$

Решите систему уравнений:

№ 122.

$$\begin{cases} 2x + 3|y| = 13, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

№ 123.

$$\begin{cases} |x + y| = 1, \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

№ 124.

$$\begin{cases} |x - y| = 2, \\ |x| + |y| = 4. \end{cases}$$

№ 125.

Найдите целочисленные решения неравенства

$$|x^2 + 2x| \leq x.$$

Решите систему неравенств:

№ 126.

$$\begin{cases} |2x - 5| < 3, \\ |3x - 1| \leq 4. \end{cases}$$

№ 127.

$$\begin{cases} |x-3| < 5, \\ |x-2| \geq 1. \end{cases}$$

№ 128.

$$\begin{cases} |x| \geq x, \\ 2x-1 > 3. \end{cases}$$

№ 129.

$$\begin{cases} |x| \leq -x, \\ |x+2| > 1. \end{cases}$$

№ 130.

$$\begin{cases} |x-1| < 9-2x, \\ |x-5| + |x-6| + |x-7| > 15. \end{cases}$$

№ 131.

$$\begin{cases} |2x+5| \geq |7-4x|, \\ |x| < 2|x-4| + x-2. \end{cases}$$

№ 132.

$$\begin{cases} |x-5| \leq 1, \\ (x-3)(x-5) > 0. \end{cases}$$

№ 133.

$$\begin{cases} |x-2| < 5-x, \\ \frac{2x-9}{x-6} < 1. \end{cases}$$

Постройте график функции:

№ 134.

$$y = 1 - |x|.$$

№ 135.

$$y = x^2 + 2|x| - 3.$$

№ 136.

$$y = \frac{|x-1|}{x-1}.$$

№ 137.

$$y = \frac{|x+2|}{x+2} \cdot (3-x).$$

№ 138.

$$y = \frac{|x-2|}{2-x} \cdot (x^2 - 2x).$$

№ 139.

$$y = \left| \frac{2x-3}{x-2} \right|.$$

№ 140.

$$y = |x^2 - x - 6|.$$

№ 141.

$$y = |x^2 - |x| - 6|.$$

№ 142.

$$y = |x - 5| + |x - 2|.$$

№ 143.

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

№ 144.

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 12x + 36}.$$

№ 145.

$$y = ||x| - 2| - 1|.$$

Постройте график зависимости:

№ 146.

$$|y| = x.$$

№ 147.

$$|y| = |x|.$$

№ 148.

$$|y| = 1 - x.$$

№ 149.

$$|y| = |1 - x|.$$

№ 150.

$$|y| = x^2 - x - 6.$$

№ 151.

$$|y| = |x^2 - x - 6|.$$

№ 152.

$$|y| = x^2 + 2x - 3.$$

№ 153.

$$|y| = x^2 - 4|x| + 3.$$

№ 154.

Решите уравнение графически

$$|x - 1| + 2x - 5 = 0.$$

№ 155.

Решите неравенство графически

$$|x| \leq 2x^2 - 1.$$

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству:

№ 156.

$$|y| < 3|x| - 2.$$

№ 157.

$$|x-1|(y+2) > 0.$$

№ 158.

$$x|y| \geq 2.$$

Найдите площадь фигуры, заданной неравенством:

№ 159.

$$|x-1| + |y| \leq 10.$$

№ 160.

$$|x-1| + |y-1| \leq 8.$$